Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4401-1 Procesos de Markov
29 de abril de 2022

Auxiliar 7: Más resultados sobre CM y Martingalas

Profesor: Joaquín Fontbona T.
Auxiliares: Luis Fuentes C. y Pablo Zúñiga R.

P1. Sea $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov homogénea a valores en E (numerable), F un subconjunto finito de E y el tiempo de parada $\sigma_F = \inf\{n \geq 1 : X_n \in F\}$. En esta pregunta, demostraremos que

$$(\forall j \in F) : \mathbb{E}_j[\sigma_F] < \infty \implies X \text{ es recurrente positiva.}$$

Para ello, defina $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$\rho_0 := 0, \quad \rho_n := \inf\{m > \rho_{n-1} : X_m \in F\}, \quad n \geq 1.$$

y proceda como sigue:

a) Muestre que, para todo $x \in F$ y $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_x(\rho_n < \infty) = 1$.

b) Defina $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $Y_n := X_{\rho_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Muestre que Y es una cadena de Markov en F con matriz de transición $Q = (Q_{xy})_{x,y\in F}$ dada por $Q_{xy} = \mathbb{P}_x(X_{\sigma_F} = y)$.

c) Muestre que Y es irreducible recurrente positiva.

d) Defina $\sigma_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$ y $\overline{\sigma}_x = \inf\{n \geq 1 : Y_n = x\}$ para todo $x \in F$. Muestre que

$$\forall x \in F : \quad \sigma_x = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{k<\overline{\sigma}_x}(\rho_{k+1} - \rho_k),$$

y que $\{\overline{\sigma}_x > k\} \in \mathcal{F}_{\rho_k}$. **Indicación:** para τ_1 y τ_2 tiempos de parada, $\{\tau_1 = \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$.

e) Muestre que, para todo $x \in F$, $\mathbb{E}_x[\sigma_x] \leq \mathbb{E}_x[\overline{\sigma}_x] \max_{y\in F} \mathbb{E}_y[\sigma_F]$ y concluya.

P2. Considere $x \in \mathbb{N}$ y una colección $(\xi_n^k)_{n,k\geq 1}$ de variables aleatorias iid e independientes de una v.a. X_0. Se define el proceso de ramificación $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$X_0 = x, \quad X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \xi_{n+1}^k \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

y denote $m = \mathbb{E}_1[X_1]$ (esto es, la esperanza para el caso $X_0 = 1$).

a) Demuestre que el proceso $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definido por $W_n := m^{-n}X_n$ es una martingala con respecto a la filtración natural de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denotada $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Concluya el valor de $\mathbb{E}_x[X_n]$ para todo $x \in \mathbb{N}$ y su límite cuando $n \to \infty$.