Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-5 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
2 de julio de 2024

Auxiliar 13: Análisis cualitativo de sistemas

Profesor: Alexis Fuentes P.
Auxiliares: Romina Abarca R. y Pablo Zúñiga R.

P1. Considere la ecuación de un péndulo simple $\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \omega^2 \operatorname{sen}(\theta) = 0$, donde $\omega > 0$ es su frecuencia natural y $\mu > 0$ es el coeficiente de resistencia del aire.

a) Escriba la ecuación como un sistema de primer orden y encuentre sus puntos críticos.

b) Calcule el sistema linealizado en torno a cada punto crítico.

c) Clasifique los puntos críticos de acuerdo a tipo y estabilidad.

d) Esboce el diagrama de fase asociado.

P2. Para $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, considere el sistema $X' = AX$, donde $X(t) = (x(t), y(t))$ y $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2a & 2 \end{pmatrix}$. Describa el retrato de fase que se obtiene para distintos valores de a.

P3. **Modelo de Lotka-Volterra.** En **Ecología Matemática**, los modelos de Lotka-Volterra son sistemas de ecuaciones diferenciales que modelan la interacción y competición de dos o más especies bajo determinadas condiciones relativas a su hábitat, medioambiente, entre otros factores. Un ejemplo de ellos es el siguiente sistema no lineal autónomo:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 2y), \\ \dot{y} = y(2 - x - y). \end{cases}$$

a) Encuentre los puntos críticos del sistema, escriba el sistema linealizado en torno a cada uno de ellos y clasifíquelos según tipo y estabilidad.

b) Usando lo anterior, grafique el diagrama de fase.

Resumen de contenidos

En el resumen, considere el sistema no lineal autónomo para $t \geq 0$:

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) = G(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Definición (Puntos Críticos). Se dirá que $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ es **punto crítico** de (S) si $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$, es decir, $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ es tal que las derivadas temporales de x e y se anulan. Denotaremos por $\mathscr{C}^*$ al conjunto de puntos críticos de (S), es decir,

$$\mathscr{C}^* := \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2 : F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0\}.$$

Definición (Sistema Linealizado y Jacobiano). Sea (x^*, y^*) un punto crítico de (S). Se define el **sistema linealizado en torno a** (x^*, y^*) y el **jacobiano del sistema** (S) como:

$$(SL) \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \\ \dot{y} = \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \end{cases} \qquad J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Definición (Vocabulario asociado a puntos críticos). Considere (x^*, y^*) un punto crítico de (S) y $J(x, y)$ el Jacobiano asociado.

- El sistema (S) se dirá **degenerado en torno a** (x^*, y^*) si $|J(x^*, y^*)| = 0$.
- El punto crítico (x^*, y^*) se dirá **aislado** si existe $\delta > 0$ tal que en $B((x^*, y^*), \delta)$ no existen otros puntos críticos. De lo contrario, se dice que los puntos críticos son **densos** en torno a (x^*, y^*).
- El punto crítico (x^*, y^*) se dirá **estable** si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : \|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta \implies \forall t \geq 0, \|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \epsilon$$

- El punto crítico (x^*, y^*) se dirá **inestable** si no es estable.
- El punto crítico (x^*, y^*) se dirá **asintóticamente estable** si es estable y

$$\exists \rho > 0 : \|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \rho \implies \lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$$

Proposición. Considere (x^*, y^*) un punto crítico de (S) y $J(x, y)$ el Jacobiano asociado.

1. Si $|J(x^*, y^*)| \neq 0$, entonces (x^*, y^*) es un punto crítico aislado de (S) y del sistema linealizado en torno a (x^*, y^*).

2. Si $|J(x^*, y^*)| = 0$, entonces los puntos críticos del sistema linealizado en torno a (x^*, y^*) son densos en torno a (x^*, y^*). Más precisamente, si $J(x^*, y^*) \neq 0_{22}$, entonces $\mathscr{C}^*$ es una recta que contiene a (x^*, y^*); si $J(x^*, y^*) = 0_{22}$, entonces $\mathscr{C}^* = \mathbb{R}^2$.

Teorema (Poincaré y Lyapunov). Considere (x^*, y^*) un punto crítico de (S) tal que $|J(x^*, y^*)| \neq 0$, λ_1 y λ_2 los valores propios de $J(x^*, y^*)$ (que se asumen no nulos) y v_1 y v_2 los vectores propios asociados respectivos. Entonces el punto crítico (x^*, y^*) será:

1. Un **nodo** si λ_1 y λ_2 son reales y tienen igual signo.

   - Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, entonces es **asintóticamente estable**.
   - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, entonces es **inestable**.

   Además, las trayectorias del sistema son tangentes en (x^*, y^*) a la dirección del vector propio asociado al valor propio con menor valor absoluto. Las trayectorias rectas inducidas por el otro vector propio, queda excluida del análisis anterior.

2. Un **punto silla** si λ_1 y λ_2 son reales y tienen distinto signo. En este caso, la dirección estable es la del vector propio asociado al valor propio negativo y la dirección inestable es la del vector propio asociado al valor propio positivo. Las trayectorias divergen de forma asintótica al vector propio asociado al valor propio positivo.

3. Un **espiral** si λ_1 y λ_2 son complejos conjugados, i.e., $\lambda_{1,2} = \sigma \pm iw$ con $w \neq 0$.

   - Si $\sigma < 0$, entonces es **asintóticamente estable**.
   - Si $\sigma > 0$, entonces es **inestable**.