



Auxiliar 9: Extra C2

Profesor: Axel Osses A.

Auxiliares: Ignacia Echeverría H. y Pablo Zúñiga R.

P1. a) **Ecuación de Euler.** Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

- 1) $x^2 y'' + 9xy' - 20y = 0.$
- 2) $x^2 y''' - 5xy'' + 5y' = -15x^4$

b) **Constantes indeterminadas.** Determine la forma de una solución particular de la ecuación:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = a \cos(\alpha t) + b \sin(\beta t)$$

con $n > 14$, a , b , α y β constantes reales y donde se supone que $i\alpha$ y $i\beta$ son raíces de multiplicidad igual a tres y cuatro del polinomio característico de la ecuación homogénea asociada, respectivamente, y el resto de las raíces son simples y distintas de 0. Analice para los diferentes casos en función de α y β (incluya los casos $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ en su análisis).

P2. Fórmula de Liouville. Resuelva la ecuación $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln(x)$ para $x > 0$. **Indicación:** para encontrar una solución de la ecuación homogénea, proponga $y_1(x) = x^\alpha$ para α una constante que debe determinar.

P3. a) **Teorema de Existencia y Unicidad para primer orden.** Considere el siguiente problema de Cauchy

$$(PC1) \begin{cases} \sqrt[3]{1+x^2+2xy^3+y^6} - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1) Usando el cambio de variable $z = x + y^3$, transforme este problema en un nuevo problema de Cauchy

$$(PC2) \begin{cases} \frac{dz}{dx} = f(x, z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

especificando x_0 , z_0 y f .

- 2) Aplicando el Teorema de Existencia y Unicidad, encuentre todos los valores de $x_0, z_0 \in \mathbb{R}$, de modo que exista una única solución global de (PC2), es decir, definida en todo \mathbb{R} .
- 3) Muestre que para todo $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, existe una función continua $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable en $A = \{x \in \mathbb{R} : y(x) \neq 0\}$, y que resuelve (PC1) en A .

b) **Teorema de Existencia y Unicidad para orden superior.** Para los siguientes Problemas de Cauchy, determine condiciones sobre x_0 para que exista una única solución y en tales casos especifique su regularidad¹ y en qué subconjuntos de \mathbb{R} quedaría definida:

$$(1) \begin{cases} x^2 y'' + 9xy' - 20y = 0 \\ y(x_0) = a, y'(x_0) = b \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 y''' - 5xy'' + 5y' = -15x^4 \\ y(x_0) = c, y'(x_0) = d \end{cases}$$

Corrobore esto encontrando dos soluciones distintas de (1) que satisfagan $y(0) = y'(0) = 0$.

¹Especificar regularidad significa mencionar a qué clase C^n pertenece.