Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
11 de abril de 2022

Auxiliar 5: Polinomio característico, valores propios y aplicaciones

Profesor: Axel Osses A.
Auxiliares: Ignacia Echeverría H. y Pablo Zúñiga R.

P1. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'' + 2y' + y = 0$.
b) $y'' + 4y' + 2y = 0$.
c) $y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0$.
d) **(Propuesto)** $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sec(2x)$.
e) **(Propuesto)** $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

P2. Un problema espectral. Considere el siguiente problema de segundo orden con condiciones de borde:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } y \neq 0 \text{ y } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tales que:} \\ y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

a) Encuentre la solución general de la ecuación anterior (sin condiciones de borde) en los casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$.
b) Si $\lambda \leq 0$, demuestre que las condiciones de borde solo pueden satisfacerse para una solución nula.
c) Si $\lambda > 0$, demuestre que las condiciones de borde si pueden satisfacerse para alguna solución no nula, siempre que λ tome los valores de una sucesión $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ divergente que debe determinar. Escriba las soluciones correspondientes a estos casos.
d) **(Propuesto)** Más generalmente, multiplicando por $y(x)$ la ecuación e integrando por partes entre $x = 0$ y $x = \pi$, demuestre que λ es necesariamente positivo si

$$y \neq \text{cte} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} y(0) & y'(\pi) \\ y(\pi) & y'(0) \end{vmatrix} \geq 0$$

En este problema encontramos los **valores propios y funciones propias** del operador diferencial $A : V \to C[0,\pi]$ definido por $A(y) = y''$ donde $V = \{y \in C^2[0,\pi] : y(0) = y'(\pi) = 0\}$, tal y como para una matriz se pueden encontrar sus valores y vectores propios.

P3. Fenómeno de la resonancia. Considere el sistema mecánico de la Figura (1), donde $m > 0$ es la masa del objeto, $k > 0$ es la constante de elasticidad del resorte, $b \geq 0$ es la constante de amortiguamiento y $F(t)$ es la fuerza total ejercida sobre la masa en el tiempo $t \geq 0$.

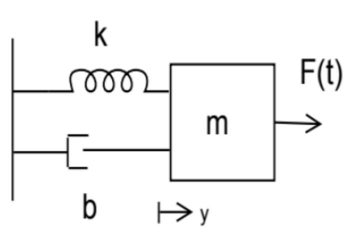

Figura 1: Sistema de la **P3.**

Se puede demostrar, usando la segunda Ley de Newton, que el desplazamiento y respecto al largo natural del resorte satisface la ecuación diferencial $my'' + by' + ky = F(t)$ con $t \geq 0$. Considere $F(t) = B\cos(w_0 t)$, para $B \in \mathbb{R}$ y $w_0 > 0$.

a) Encuentre la solución general de la ecuación homogénea asociada en todos los casos dados por la relación entre b, k y m y esboce los gráficos respectivos.

b) Considere el caso $b = 0$. Encuentre la solución particular y_p de la ecuación y estudie la amplitud de esta, en función w_0 ¿Qué observa cuando $w_0^2 \to \frac{k}{m}$?

Lo estudiado en esta pregunta corresponde al **fenómeno de la resonancia**. Todo sistema físico posee una frecuencia natural, en este caso, aquella dada por $w = \sqrt{k/m}$. Cuando tal sistema se somete a un forzamiento periódico, esto es, en la forma de una función sinusoidal, la frecuencia w_0 asociada impactará sobre la amplitud del movimiento de la masa. El caso crítico, como se observa en **P3.** *b*), es cuando $w_0 \approx \sqrt{k/m}$, momento en el que la amplitud alcanza un máximo. En la vida real, esto se manifiesta como el colapso estructural del sistema. Ejemplos al pie de página[1][2].

Resumen de contenidos

Definición. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $n \in \mathbb{N}$ y $Q \neq 0$. Considere la EDO

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x), \quad \forall x \in I \tag{1}$$

Se define el **s.e.v. de soluciones homogéneas** de (1) como

$$\mathcal{H} := \{z \in C^n(I) : a_n(x)z^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)z^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)z'(x) + a_0(x)z(x) = 0, \forall x \in I\}$$

Asimismo, se define el **conjunto de soluciones** de (1) como

$$\mathcal{S} := \{z \in C^n(I) : a_n(x)z^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)z^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)z'(x) + a_0(x)z(x) = Q(x), \forall x \in I\}$$

En el caso $a_k(x) = a_k \equiv$ cte y $Q \equiv 0$, a (1) se le asocia el **polinomio caractéristico** dado por $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$.

Teorema 1 (Soluciones de una EDO homogénea de orden 2). Considere la EDO lineal homogénea de orden 2 a coeficientes constantes dada por $y'' + ay' + by = 0$. Entonces existe una base $\{y_1, y_2\}$ del espacio de soluciones homogéneas $\mathcal{H}$. Más aún, si λ_1 y λ_2 son las raíces del polinomio característico asociado, entonces:

i) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ es una base de $\mathcal{H}$.

ii) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, entonces $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$ es una base de $\mathcal{H}$.

iii) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ son complejos conjugados, a decir, $\lambda_1 = \sigma + iw$ y $\lambda_2 = \sigma - iw$, entonces $\{e^{\sigma x}\cos(wx), e^{\sigma x}\operatorname{sen}(wx)\}$ es una base de $\mathcal{H}$.

Teorema 2 (Método de variación de parámetros para orden 2). Considere la EDO lineal no homogénea de orden 2 dada por $y'' + ay' + by = Q(x)$. La solución general de esta ecuación se escribe como $y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_p$ donde y_1 e y_2 constituyen una base de $\mathcal{H}$ e y_p es la llamada solución particular, que puede encontrarse con la fórmula

$$y_p = -y_1\int \frac{Qy_2}{W}dx + y_2\int \frac{Qy_1}{W}dx \qquad \text{donde } W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

[1] *Puente de Tacoma (efecto de resonancia)*, Youtube. `https://youtu.be/SzObC64E2Ag`.

[2] *5 cagadas en la ingeniería de puentes por culpa de la resonancia.* `https://estructurando.net/2014/06/30/5-cagadas-en-la-ingenieria-de-puentes-por-culpa-de-la-resonancia/`