

## MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Profesor: Axel Osses

Auxiliares: Sofía Callejas y Pablo Zúñiga



## Auxiliar 6 (Extra C2)

29 de abril de 2019

**P1.** Encuentre la forma que tiene la solución general de (separe el análisis en solución homogénea primero y solución particular después):

$$y^{(iv)} + \beta y''' + y'' = x e^{\alpha x}$$

para todos los posibles valores reales de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . Nota: no es necesario que encuentre las constantes de las soluciones particulares.

**P2.** a) Encuentre la solución homogénea y la forma de la solución particular de la ecuación diferencial

$$(D + 1)^2(D^2 - 2D + 2)y = 1 + 3xe^{-x} + 2e^x[\cos(x) + \sin(x)]$$

¿Cuál hubiese sido el anulador del tercer sumando si fuera  $2e^{-3x}[\cos(2x) + \sin(2x)]$ ?  
¿Habría resonancia? ¿Por qué? ¿Qué solución particular se propone con esa modificación?

b) **Propuesto:** Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$(D - 1)^2(D + 3)^2y = 5xe^{2x}$$

**P3.** a) 1) Determine la solución general de la siguiente ecuación:

$$x^2 \cos(x)y'' + (x^2 \sin(x) - 2x \cos(x) - x^2 \cos^2(x))y' + (2 \cos(x) - x \sin(x) + x \cos^2(x))y = 0$$

**Indicación:** verifique que  $x$  es solución.

II) Suponga ahora que el lado derecho no es idénticamente nulo, digamos  $f(x)$ . Encuentre una expresión para la solución particular.

b) **Propuesto:** Considere la ecuación diferencial lineal de segundo orden para  $x > 0$

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln(x)$$

Verifique que  $\{x^2, x^2 \ln(x)\}$  son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea y encuentre la solución particular de la ecuación no homogénea. No calcule integrales, en caso de aparecer, solo déjelas expresadas.

c) **Propuesto:** Resuelva la ecuación

$$x^3 y^{(iv)} - 4x^2 y''' + y' = 0$$

**P4.** Considere la ecuación lineal de orden  $n$  a coeficientes constantes:

$$(D - \alpha_n)(D - \alpha_{n-1}) \dots (D - \alpha_1)y = 0$$

donde  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$  son constantes reales y distintas de cero tales que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ .

- a) Pruebe que el Wronskiano asociado a la ecuación anterior es una constante distinta de cero. *Hint*: En la igualdad  $(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$  se tiene que  $a_{n-1} = -\sum_{i=1}^n x_i$ .
- b) Si denotamos por  $z_n(x)$  al determinante que se obtiene al eliminar la última fila y la última columna de Wronskiano, pruebe que:

$$(D + \alpha_n)z_n = 0$$

**Indicación:** utilice la multilinealidad del Wronskiano.

- c) Si  $z_i(x)$  es el determinante que se obtiene al eliminar la última fila y la columna  $i$  del Wronskiano. Pruebe que  $\forall i = 1, \dots, n$ :

$$(D + \alpha_n)(D + \alpha_{n-1}) \dots (D + \alpha_1)z_i = 0$$

**P5.** Sea  $L > 0$  y sean  $y_1$  y  $y_2$  dos soluciones linealmente independientes de

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, x \in (0, L)$$

tales que  $y_1(0) = 1, y_1(L) = 0, y_2(0) = 0, y_2(L) = 1$ , con  $a_1$  y  $a_0$  funciones continuas en  $[0, L]$ . Pruebe que el valor medio del coeficiente  $a_1$  está dado por:

$$\frac{1}{L} \int_0^L a_1(x) dx = \ln \left( \frac{y_2'(0)}{y_1'(L)} \right)^{1/L}$$

**Indicación:** puede usar propiedades del Wronskiano.