

Auxiliar 8.5: Trabajo dirigido C4

Profesor: Avelio Sepúlveda Donoso
Auxiliar: Pablo Zúñiga Rodríguez-Peña

P1. Calcule las siguientes sumatorias:

$$a) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \left(k + \frac{2^j}{j} \right).$$

$$b) \sum_{i=1}^n (\cos(i+2) + \cos(i) - \cos(i+1) - \cos(i-1)).$$

$$c) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^n}.$$

P2. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ considere la suma

$$S = 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \dots + \frac{1+2+\dots+n}{n}.$$

Escriba S como sumatoria doble y calcule su valor.

P3. Sea $r \neq 1$ y $n \geq 1$. Se define $S_n := \sum_{k=1}^n kr^k$.

$$a) \text{ Demuestre que } S_n = r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}.$$

b) Use lo anterior para calcular el valor de S_n .

c) Considere para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}$, la suma

$$S = 1 + 2(1+b) + \dots + n(1+b+\dots+b^{n-1}).$$

Escriba S como sumatoria doble y calcule su valor.

P4. Sea A un conjunto finito no vacío.

a) Sea \mathcal{C} una partición de A . Demuestre que $|A| = \sum_{C \in \mathcal{C}} |C|$.

b) Suponga adicionalmente que $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}, |C_1| = |C_2|$. Demuestre que $|\mathcal{C}|$ divide a $|A|$.

c) Determine la cantidad de funciones sobreyectivas en $\{0, 1\}^A$.

d) Determine la cantidad de particiones de A con dos partes.

Indicación: tenga cuidado con sobrecontar.

P5. Sea $n \geq 1$ y considere¹ $S_n = \{f \in [1..n]^{[1..n]} : f \text{ es biyectiva}\}$.

a) Justifique brevemente que S_n es finito, y luego determine $|S_n|$.

b) Para $k \in [1..n]$, defina $S_n^k := \{f \in S_n : f(k) = k\}$. Determine $|S_n^k|$.

c) Para $n \geq 2$, determine $|S_n^1 \cup S_n^2|$.

¹El conjunto S_n se denomina **permutaciones**.

Proposición (Propiedades de las sumatorias). Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $m \leq n$, se tienen

- $\sum_{k=m}^n 1 = n - m + 1.$
- $\sum_{k=m}^n (a_k \pm \lambda b_k) = \sum_{k=m}^n a_k \pm \lambda \sum_{k=m}^n b_k,$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es constante.
- (Traslación de índices) $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m-s}^{n-s} a_{k+s} = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s},$ donde $s \in \mathbb{N}.$
- (Separación de índices) $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^s a_k + \sum_{k=s+1}^n a_k,$ donde $m \leq s < n.$
- (Propiedad telescópica) $\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}.$
- (Reordenamiento de índices) Si $f : [m..n] \rightarrow [m..n]$ es biyectiva, entonces $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n a_{f(k)}.$

Proposición. Si $I, J \subseteq [0..n]$ son disjuntos, entonces $\sum_{k \in I \cup J} a_k = \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in J} a_k.$

Ejemplo (Sumatorias conocidas).

- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}, r \neq 1.$

Proposición (Intercambio de índices). Para una sumatoria doble $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij}$ cuyos límites inferiores y superiores no dependen de los índices, se tiene $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n a_{ij}.$

Proposición (Propiedades del cardinal).

- (1) $|A| = 0 \iff A = \emptyset.$
- (2) Si A es finito y $f : A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces B es finito y $|B| = |A|.$
- (3) (Monotonía del cardinal) Si B es finito y $A \subseteq B,$ entonces A es finito y $|A| \leq |B|.$
- (4) (Unión disjunta) Si A y B son finitos y disjuntos, $|A \cup B| = |A| + |B|.$
- (5) (Unión en general) Si A y B son finitos, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$
- (6) (Diferencia) Si $A \subseteq B$ y B es finito, $|B \setminus A| = |B| - |A|.$
- (7) (Unión finita) Si A_1, \dots, A_n son finitos y disjuntos de a pares, $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$
- (8) (Producto cartesiano) Si A y B son finitos, $|A \times B| = |A||B|.$
- (9) (Funciones) Si A y B son finitos, $|B^A| = |B|^{|A|}.$

Proposición. Para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in [0..n],$ se tienen

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ (Identidad de Pascal).