

Auxiliar 7: Sumatorias y Binomio de Newton

Profesor: Avelio Sepúlveda Donoso

Auxiliar: Pablo Zúñiga Rodríguez-Peña

P1. Sumas conocidas. Calcule el valor de las siguientes sumatorias.

$$a) \sum_{k=3}^{n-1} (k-2)(k+1).$$

$$c) \sum_{i=1}^n \left(\frac{3}{2i-1} - \frac{3}{2i-3} \right).$$

$$b) \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{k} \right).$$

$$d) \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n}.$$

P2. Binomio de Newton. Calcule las siguientes sumatorias:

$$a) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!(n-k)!}.$$

$$b) \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (3^j + 2^{k-j}).$$

P3. Número esperado de caras en n lanzamientos independientes de moneda. Sea $p \in \mathbb{R}$ un número fijo. Demuestre, sin usar inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$$

P4. a) Demuestre que para todo $n, k, i \in \mathbb{N}$ tales que $k \leq i \leq n$,

$$\binom{n}{i} \binom{i}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k}.$$

b) Use lo anterior para demostrar que

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} = 3^n.$$

P5. Los números de Fibonacci se definen como la secuencia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$f_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \text{ o } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Use inducción para probar que $\sum_{k=0}^n f_k^2 = f_n f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición (Propiedades de las sumatorias). Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $m \leq n$, se tienen

- $\sum_{k=m}^n 1 = n - m + 1.$
- $\sum_{k=m}^n (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^n a_k,$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es constante.
- $\sum_{k=m}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^n a_k \pm \sum_{k=m}^n b_k.$
- (Traslación de índices) $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m-s}^{n-s} a_{k+s} = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s},$ donde $s \in \mathbb{N}.$
- (Separación de índices) $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^s a_k + \sum_{k=s+1}^n a_k,$ donde $m \leq s < n.$
- (Propiedad telescópica) $\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}.$
- (Reordenamiento de índices) Si $f : [m..n] \rightarrow [m..n]$ es biyectiva, entonces $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n a_{f(k)}.$

Proposición. Si $I, J \subseteq [0..n]$ son disjuntos, entonces $\sum_{k \in I \cup J} a_k = \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in J} a_k.$

Ejemplo (Sumatorias conocidas).

- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$ Notar que se mantiene la misma fórmula si el índice k parte de 0.
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$ Notar que se mantiene la misma fórmula si el índice k parte de 0.
- $\sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1},$ para $r \neq 1$ (suma geométrica).

Proposición (Intercambio de índices). Para una sumatoria doble $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij}$ cuyos límites inferiores y superiores no dependen de los índices, se tiene $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n a_{ij}.$

Proposición (Coeficiente binomial). $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$

Proposición. Para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in [0..n],$ se tienen

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$

Teorema (Binomio de Newton). Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N},$ $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$

Auxiliar 10: Ejercicios propuestos

Profesor: Avelio Sepúlveda Donoso

Auxiliar: Pablo Zúñiga Rodríguez-Peña

P1. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ considere la suma

$$S = 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \dots + \frac{1+2+\dots+n}{n}.$$

Escriba S como sumatoria doble y calcule su valor.

P2. Sea $r \neq 1$ y $n \geq 1$. Se define $S_n := \sum_{k=1}^n kr^k$.

a) Demuestre que $S_n = r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$.

b) Use lo anterior para calcular el valor de S_n .

c) Considere para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}$, la suma

$$S = 1 + 2(1+b) + \dots + n(1+b+\dots+b^{n-1}).$$

Escriba S como sumatoria doble y calcule su valor.

P3. Sean $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones. Se define la **convolución de f y g** como la función $(f * g) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por¹

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k).$$

a) Si $f(u) = 1$ y $g(u) = u$ para todo $u \in \mathbb{N}$, calcule $(f * f)$, $(f * g)$ y $(g * g)$.

b) Demuestre que la convolución es una operación conmutativa, es decir, para todas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que $f * g = g * f$.

c) Demuestre que la convolución es una operación asociativa, es decir, para todas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Indicación: Demuestre y use el cambio de índices $\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_{k,i} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_{k,i}$ (Revisar ejemplo después de la Proposición 6.7 del apunte).

¹La convolución de funciones es un concepto de extrema importancia en matemáticas, ciencias e ingeniería. Algunos ejemplos notables de sus aplicaciones se encuentran en el estudio de ecuaciones diferenciales, o el procesamiento de imágenes por redes neuronales. Ver el video de 3Blue1Brown *But what is a convolution?*