

## Auxiliar 9: TFC y Aplicaciones

**Profesor:** Rodolfo Gutiérrez R.

**Auxiliar:** Millaray Díaz A. y Pablo Zúñiga R.

### P1. Aplicaciones breves del TFC.

- a) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable y creciente, y  $a \in \mathbb{R}$  fijo. Demuestre que la función  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $G(x) = \int_0^x f(t)dt$  es convexa.
- b) Sean  $a < b$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $\int_a^b f(x)dx = 0$ . Demuestre que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

### P2. Tan importante como los dos TFC.

- a) Sean  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones derivables, y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Defina  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt.$$

Demuestre que  $G$  es derivable en  $(a, b)$ , con derivada  $G'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$ .

- b) Defina  $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Demuestre que  $F$  es constante y calcule su valor.

- c) Calcule el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)dt}{1 - e^{x^6}}.$$

**P3.** Calcule el área encerrada entre las curvas  $y^2 = x$  e  $y = x$ , entre  $x = 0$  y  $x = 4$ . Antes de calcular, grafique las curvas en forma aproximada indicando todas las intersecciones.

### P4. Volumen de pirámides y conos.

- a) Calcule el volumen de una pirámide de altura  $h$  y base un polígono regular de  $n \geq 3$  lados con radio interior  $r_0$ , es decir, una figura plana con  $n$  lados de igual longitud y radio de la mayor circunferencia inscrita  $r_0$ .

**Indicación:** El área de un polígono regular de  $n$  lados es  $A = \frac{1}{2}pr$ , donde  $p$  es su perímetro y  $r$  es el radio de la circunferencia inscrita dentro del polígono.

- b) Calcule el volumen de un cono de altura  $h > 0$  y base de radio  $r_0 > 0$  de dos formas distintas:
- 1) Directamente, usando las técnicas de cálculo integral.
  - 2) Haciendo  $n \rightarrow \infty$  en la parte anterior, justificando breve y apropiadamente.

**Teorema (Primer TFC).** Sea  $f$  continua en un intervalo  $I$  y  $a \in I$ . Entonces la función  $G$  definida como

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

es derivable en  $\text{int}(I)$  con derivada  $G' = f$ .

**Corolario (del Primer TFC).** Sea  $f$  es continua en  $I$ . Si existe  $F$  continua en  $I$  tal que es primitiva de  $f$  en  $I$ , entonces para todo  $a, b \in I$ ,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

**Teorema (Segundo TFC).** Sea  $f$  integrable en  $[a, b]$ . Si existe  $F$  continua en  $[a, b]$  tal que es primitiva de  $f$  en  $(a, b)$ , entonces

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

**Teorema (Integración por partes).** Sean  $u$  y  $v$  son funciones continuas en  $I$  y derivables en  $\text{int}(I)$ . Si  $u'$  y  $v'$  son continuas, entonces para todo  $a, b \in I$ ,

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = uv|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Si escribe  $u = u(x)$ ,  $dv = v'(x)dx$  y  $du = u'(x)dx$ , obtiene *un día vi una vaca (sin cola) vestida de uniforme*.

### Primeras aplicaciones de la integral

#### ■ Cálculo de áreas.

El área encerrada entre el gráfico de una función integrable  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y el eje  $X$  está dada por

$$A(f) = \int_a^b |f(x)|dx.$$

#### ■ Cálculo de volúmenes de sólidos (no de revolución).

Considere  $C$  un sólido en el espacio tridimensional, alineado con el eje  $X$  de manera que se cumpla lo siguiente: El corte transversal de  $C$  en la abscisa  $x$ , perpendicular al eje  $X$ , tiene área  $A(x)$  (piense, por ejemplo, cuando se corta queso en láminas). Entonces el volumen de  $C$  está dado por

$$V(C) = \int_a^b A(x)dx,$$

donde  $a$  y  $b$  delimitan el sólido.