

## Auxiliar 7: Funciones escalonadas y Riemann-integrabilidad

**Profesor:** Rodolfo Gutiérrez R.

**Auxiliar:** Millaray Díaz A. y Pablo Zúñiga R.

**Notación:** Para  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones, anotamos  $f \leq g$  para decir  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

**P1.** a) Demuestre que

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^{1/4}} + \frac{1}{e} \right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{e^{1/4}} \right).$$

**Indicación:** Considere la partición  $P = \{0, 1/2, 1\}$ .

b) Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $0 < a < b$ . Demuestre que

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln(b) - \ln(a).$$

**Indicación:** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere la partición  $P_n = \{x_i\}_{i=0}^n$  definida por  $x_i = a(\sqrt[n]{b/a})^i$ .

c) Se busca acotar la integral de  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = \sqrt{x}$ . Para esto, considere la partición  $P = \{x_i\}_{i=0}^n$  definida como  $x_i = i^2/n^2$  para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Construya la menor función escalonada asociada a  $P$  que mayor a  $f$ , calcule su integral y estudie el límite  $n \rightarrow \infty$ .

**P2.** Considere la función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Demuestre que si  $e$  es una función escalonada tal que  $e \leq f$ , entonces  $\int_0^1 e(x) dx \leq 0$ .

b) Demuestre que si  $E$  es una función escalonada tal que  $E \geq f$ , entonces  $\int_0^1 E(x) dx \geq 1/2$ .

c) Concluya que  $f$  no es Riemann-integrable en  $[0, 1]$ .

**P3.** Sea  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función no negativa y creciente.

a) Usando la partición  $P = \{1, \dots, n\}$ , pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=2}^n f(i).$$

b) Considere  $f(x) = \ln(x)$  y utilice la parte anterior para demostrar que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!$$

**Indicación:**  $\int_1^n \ln(x) dx = n \ln(n) - (n-1)$ .

**Definición.** Una *partición* de  $[a, b]$  es un conjunto finito  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  tal que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

La *norma* de la partición se denota  $|P| = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (x_i - x_{i-1})$ .

- Si  $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$  para cada  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $P$  se dice partición *equiespaciada*, donde  $|P| = \frac{b-a}{n}$ .
- Si  $x_i = a(\sqrt[n]{b/a})^i$  para cada  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $P$  se dice partición *geométrica*.

**Definición.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *escalonada* si existe una partición  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  tal que  $f$  es constante en  $(x_{i-1}, x_i)$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . En este caso, el valor de  $f$  en  $(x_{i-1}, x_i)$  se denota  $f_i$ . Observar que no se hace una premisa sobre los valores  $f(x_i)$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

**Definición.** Sean  $P$  y  $Q$  particiones de  $[a, b]$ . Decimos que  $Q$  es un *refinamiento* de  $P$  si  $P \subseteq Q$ .

**Proposición.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es escalonada con partición  $P$ , la cantidad  $I(f, P) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i - x_{i-1})$  no depende de  $P$ . Por esto, se define la *integral de Riemann* de  $f$  como

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{i=1}^n f_i(x_i - x_{i-1}).$$

**Teorema.** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones escalonadas,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $c \in (a, b)$ . Entonces,

1.  $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$  (*linealidad* de la integral).
2.  $\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ .
3. Si  $f \leq g$ ,  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$  (*monotonía* de la integral).

**Teorema.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y no necesariamente escalonada. Entonces,

1.  $\mathcal{E}_-(f) := \{e : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : e \text{ escalonada tal que } e \leq f\} \neq \emptyset$ .
2.  $\mathcal{E}_+(f) := \{E : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : E \text{ escalonada tal que } f \leq E\} \neq \emptyset$ .
3.  $I_-(f) := \sup\{\int_a^b e(x)dx : e \in \mathcal{E}_-(f)\}$  está bien definido y se llama *integral inferior* de  $f$ .
4.  $I_+(f) := \inf\{\int_a^b E(x)dx : E \in \mathcal{E}_+(f)\}$  está bien definido y se llama *integral superior* de  $f$ .
5.  $I_-(f) \leq I_+(f)$ .

**Definición.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada se dice *Riemann-integrable* si  $I_-(f) = I_+(f)$ .

**Teorema.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada es Riemann-integrable ssi

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists f_- \in \mathcal{E}_-(f), f_+ \in \mathcal{E}_+(f)) : \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx \leq \epsilon.$$