

Auxiliar 13: Series
Profesor: Rodolfo Gutiérrez R.
Auxiliar: Millaray Díaz A. y Pablo Zúñiga R.

P1. Estudie la convergencia de las siguientes series:

<p>a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$.</p> <p>b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.</p> <p>c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2}$.</p> <p>d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(\ln(n))}$.</p> <p>e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.</p> <p>f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \left(\frac{1}{2n+1} \right)$.</p>	<p>g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sqrt{n}}{(n+1)^3 - 1}$.</p> <p>h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$.</p> <p>i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt[n]{n+1}}$.</p> <p>j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)^p}$ (analice según el valor de p).</p> <p>k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n$.</p> <p>l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n$.</p>
---	---

P2. Estudie la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n} \right)$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2)}{\sqrt{n^4 + 4}}$.

P3. a) Demuestre que si $a_n \geq 0$ para todo n , entonces $\sum a_n$ converge si, y solo si $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

Indicación: Podría servirle que la inversa de $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ es $y \mapsto \frac{y}{1-y}$, para $x > -1$ e $y < 1$.

b) Demuestre que si $a_n \in (0, 1)$ para todo n , entonces $\sum a_n$ converge si, y solo si $\sum \frac{a_n}{1-a_n}$ converge.

c) **(Propuesto)** Demuestre que si $\sum a_n^2$ converge, entonces $\sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ converge.

P4. Determine los valores de α para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{\alpha n}}$ converge.

P5. Convertir decimales periódicos a fracción. Considere el número $\alpha = 0, a_1 a_2 \dots a_{p-1} \overline{a_p \dots a_{p+k}}$ donde $k \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_{p+k} \in \{0, \dots, 9\}$ son sus cifras decimales. Demuestre que

$$\alpha = \frac{a_1 \dots a_{p+k} - a_1 \dots a_{p-1}}{99 \dots 900 \dots 0},$$

donde en el cuociente hay $k+1$ nueves y $p-1$ ceros.

Teorema. Si $\sum a_n$ converge, entonces $a_n \rightarrow 0$ (y **NO** al revés). **Es útil la contrarrecíproca.**

Teorema (Álgebra de series). Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen, entonces:

- $\sum (a_n + b_n)$ converge y tiene valor $\sum a_n + \sum b_n$.
- $\sum (\lambda a_n)$ converge y tiene valor $\lambda \sum a_n$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es constante.

Convergencia vía comparación con otra serie

Teorema (Mayoración de series). Suponga que se tienen las siguientes hipótesis:

- $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ para todo n .
- Existe $\alpha > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq \alpha b_n$ para todo $n \geq n_0$.
- $\sum b_n$ converge.

Entonces, $\sum a_n$ converge.

Teorema (Comparación por cociente). Suponga que se tienen las siguientes hipótesis:

- $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo n .
- Existe el límite $c = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

Entonces,

- $c = 0$: Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.
- $c > 0$: $\sum b_n$ converge si, y solo si $\sum a_n$ converge.

Criterios de convergencia

Teorema (Criterio del cociente y la raíz n -ésima).

Suponga que $a_n \geq 0$ para todo n y defina $r_1 = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

- Si $r_1 < 1$, entonces $\sum a_n$ converge.
- Si $r_1 > 1$ o $r = \infty$, entonces $\sum a_n$ diverge.
- Si $r_1 = 1$, no se puede decir nada sobre la convergencia de $\sum a_n$.

Si se define $r_2 = \lim \sqrt[n]{a_n}$, valen las mismas conclusiones (más no necesariamente $r_1 = r_2$).

Teorema (Criterio de integral impropia). Si $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ es decreciente, entonces $\sum_{n \geq a} f(n)$ converge si, y solo si $\int_a^\infty f(x) dx$ converge.

Teorema (Criterio de Leibniz). Si $a_n \geq 0$ para todo n , (a_n) es decreciente y convergente a cero, entonces $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Convergencia absoluta y condicional

Definición. Si $\sum |a_n|$ converge, se dice que $\sum a_n$ converge absolutamente. Si $\sum |a_n|$ diverge y $\sum a_n$ converge, se dice que $\sum a_n$ converge condicionalmente.

Series importantes y conocidas

- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.
- Si $|q| < 1$, $\sum_{n \geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$. Si $|q| \geq 1$, $\sum_{n \geq 1} q^n = \infty$.