Conjuntos de parada del Campo Libre Gaussiano

Workshop **tarK1**

Pablo Zúñiga

pablozuniga [at] ug [dot] uchile [dot] cl

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

24 de julio de 2023

Resumen

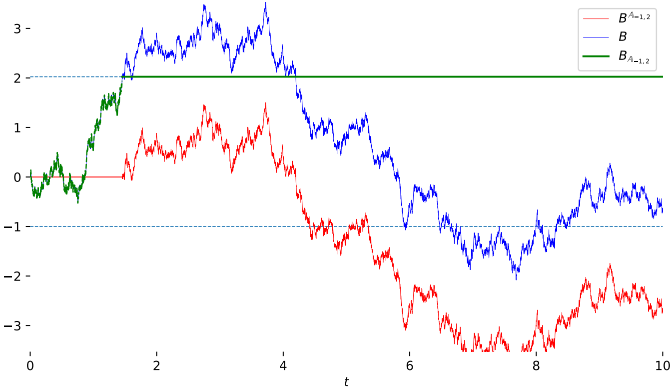
Caso del movimiento browniano

Consideremos

- $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un MB estándar,
- $\tau_{-a,b} := \inf\{t \geq 0 : B_t \in \{-a, b\}\}$ para $a, b > 0$ fijos,
- $\mathbb{A}_{-a,b} := [0, \tau_{-a,b}]$ (observar que es un intervalo aleatorio).

Caso del movimiento browniano

Notar que B admite la descomposición $B = B_{\mathbb{A}_{-a,b}} + B^{\mathbb{A}_{-a,b}}$.



¿Es posible generalizar estas nociones del tiempo 1-dimensional a uno d-dimensional?

Campo Libre Gaussiano

Construcción del GFF

Para comenzar, es necesario generalizar la noción de variables gaussianas a espacios de Hilbert generales.

Idea: Apoyarse en una caracterización de vectores gaussianos que dependa explícitamente del producto interno.

Proposición (Caracterización de vectores gaussianos en $\mathbb{R}^d$)

Sea X un vector aleatorio en $\mathbb{R}^d$ y $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ simétrica y definida positiva. Entonces son equivalentes:

- $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$.
- $\mathbb{P}(X \in \mathrm{d}x) \propto e^{-\frac{1}{2}x^\top \Sigma^{-1} x}\mathrm{d}x$.
- $\forall h \in \mathbb{R}^d$, $\langle X, h\rangle \sim \mathcal{N}(0, \langle h, \Sigma h\rangle)$.

Construcción del GFF

Sea $X \sim \mathscr{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ y definamos

$$\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle_{\Sigma^{-1}} := \langle \lambda_1, \Sigma^{-1} \lambda_2 \rangle, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^d.$$

La aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma^{-1}}$ es un producto interno y la tercera caracterización anterior se reescribe como

$$\forall h \in \mathbb{R}^d, \quad \langle X, h \rangle_{\Sigma^{-1}} \sim \mathscr{N}(0, \langle h, h \rangle_{\Sigma^{-1}}).$$

Esta observación es crucial para definir una variable gaussiana en un espacio de Hilbert general.

Construcción del GFF

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert.

Definición (Gaussiana de un Hilbert)

Una colección de v.a. $(X_h)_{h \in H}$ se dice **la gaussiana** de $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si

- $\forall h \in H$, $X_h \sim \mathcal{N}(0, \langle h, h \rangle)$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, h_1, \ldots, h_n \in H$, $(X_{h_i})_{i=1}^n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ donde $\Sigma_{ij} = \langle h_i, h_j \rangle$.

Construcción del GFF

Para $D \subseteq \mathbb{R}^d$, consideremos $H = H_0^1(D)$ con el producto interno

$$\langle f, g \rangle_\nabla := \int_D (\nabla f \cdot \nabla g) \mathrm{d}x.$$

Definición (Campo Libre Gaussiano)

El Campo Libre Gaussiano se define como la gaussiana de $(H_0^1(D), \langle \cdot, \cdot \rangle_\nabla)$.

Abreviaremos Campo Libre Gaussiano como GFF por sus siglas en inglés.

Covarianza del GFF

La intuición del caso Hilbert separable nos permite definir la evaluación de una función continua en D en el GFF.

Definición (El "producto" $\langle \Phi, F \rangle$)

Para $F \in C(D)$, se define $\langle \Phi, F \rangle := \langle \Phi, f \rangle_\nabla$, donde

$$\begin{cases} -\Delta f = F, & \text{en } D, \\ f = 0, & \text{en } \partial D. \end{cases}$$

Para toda $F \in C(D)$, $\langle \Phi, F \rangle \sim \mathcal{N}(0, \langle f, f \rangle_\nabla)$, donde se puede ver que

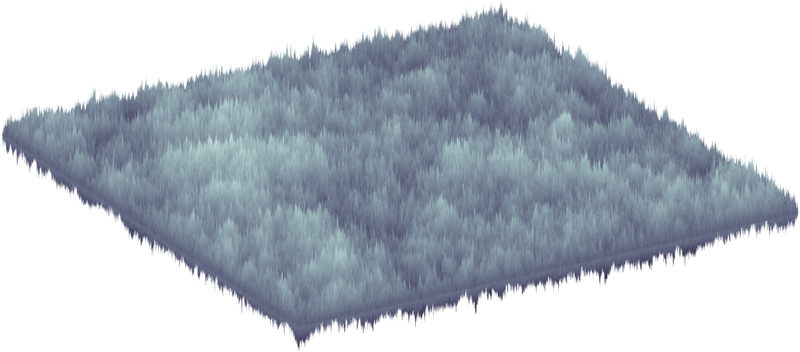
$$\langle f, f \rangle_\nabla = \iint_{D \times D} F(x) G_D(x, y) F(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Esto nos dice que la covarianza del GFF es la función de Green de D.

Observaciones

- El movimiento browniano es el GFF en $D = [0, \infty)$.
- El puente browniano en $[a, b]$ es el GFF en $D = [a, b]$.
- El GFF en $d \geq 2$ **no** es una función, sino que una distribución.

Simulación de un GFF en $d = 2$



Propiedad de Markov del GFF y conjuntos de parada

Propiedad de Markov Débil

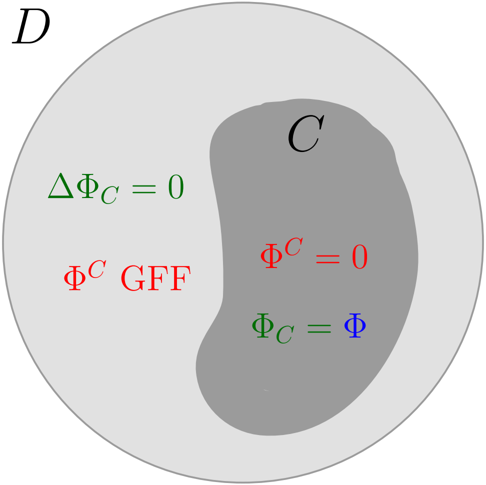
Consideremos Φ un GFF en $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

Teorema (Propiedad de Markov Débil)

Sea $C \subseteq D$ cerrado y determinista. Entonces existen distribuciones aleatorias Φ_C y Φ^C tales que

- $\Phi = \Phi_C + \Phi^C$,
- Φ_C y Φ^C son independientes,
- Φ_C es una función armónica en $D \setminus C$,
- Φ^C es un GFF en $D \setminus C$.

Propiedad de Markov Débil



Conjuntos de parada

Informalmente, las nociones unidimensionales se generalizan cambiando tiempo por conjunto y $\leq$ por $\subseteq$. La heurística es como sigue:

- $\mathscr{C}(D)$ = subconjuntos cerrados de D.
- $\mathscr{C}(D)$ se metriza con la distancia de Hausdorff y se considera la σ-álgebra boreliana asociada.
- Una colección de σ-álgebras $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_C)_{C \in \mathscr{C}(D)}$ se dice filtración si
  - $C_1 \subseteq C_2 \implies \mathcal{F}_{C_1} \subseteq \mathcal{F}_{C_2}$ (monótona).
  - $C_n \searrow C \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{C_n} = \mathcal{F}_C$ (continua por la derecha).
  - $\mathcal{F}_C$ es completa.

- Una variable aleatoria $A \in \mathscr{C}(D)$ se dice conjunto de parada para $\mathcal{F}$ si

$$\forall C \in \mathscr{C}(D), \quad \{A \subseteq C\} \in \mathcal{F}_C.$$

Recordar los tiempos de parada: $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

- La filtración natural del GFF Φ está dada por la colección de σ-álgebras $\mathcal{F}^\Phi = (\mathcal{F}^\Phi_C)_{C \in \mathscr{C}(D)}$ definida como

$$\mathcal{F}^\Phi_C = \overline{\sigma(\Phi_B : B \subseteq C \text{ cerrado})}^{Ley(\Phi)}.$$

Recordar la filtración natural de un proceso: $\mathcal{F}^X_t = \overline{\sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)}$.

- Un conjunto de parada para $\mathcal{F}^\Phi$ se dice conjunto de parada para el GFF.

Propiedad de Markov Fuerte

Teorema (Propiedad de Markov Fuerte)

Sea A un conjunto de parada para el GFF. Entonces existen distribuciones aleatorias Φ_A y Φ^A tales que condicionalmente en A,

- $\Phi = \Phi_A + \Phi^A$,
- Φ_A y Φ^A son independientes,
- Φ_A es una función armónica en $D \setminus A$,
- Φ^A es un GFF en $D \setminus A$ independiente de Φ_A.

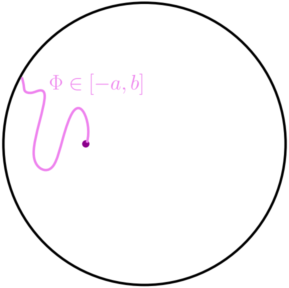
Un ejemplo de conjunto de parada: Conjuntos a dos valores

Conjuntos a dos valores

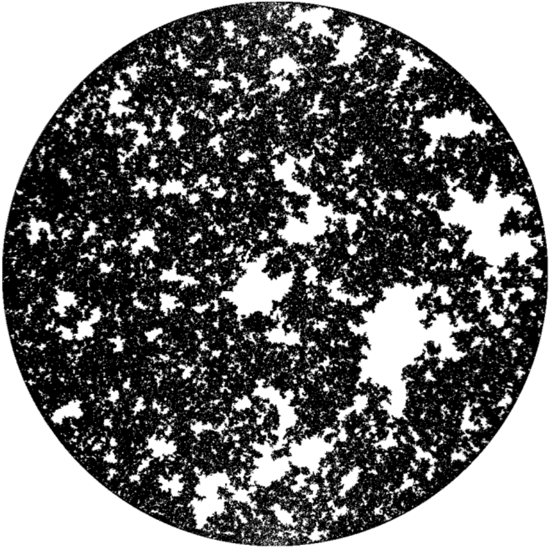
Definición (Conjuntos a dos valores)

Sean $a, b > 0$. El **conjunto a dos valores del GFF de niveles $-a$ y b** se define como el conjunto de parada $\mathbb{A}_{-a,b}$ que satisface

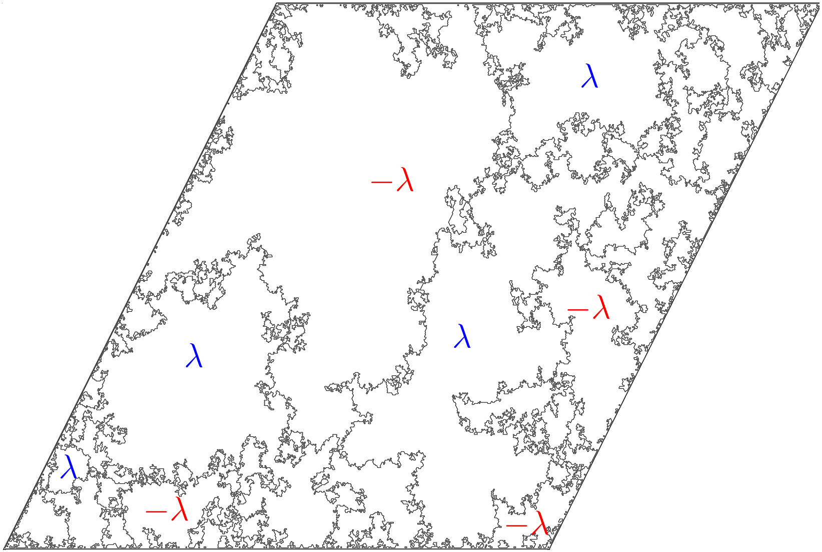
$$\Phi_{\mathbb{A}_{-a,b}}(x) \in \{-a, b\}, \quad \text{para todo } x \in D \setminus \mathbb{A}_{-a,b}.$$



Simulación de $\mathbb{A}_{-\pi,\pi}$



Simulación de $\mathbb{A}_{-\pi/2,\pi/2}$

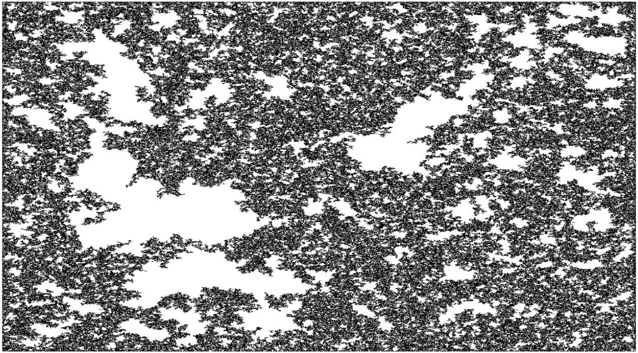


Existencia

La existencia de los TVS no es una pregunta sencilla.

- En dimensión $d = 1$, son simplemente $\mathbb{A}_{-a,b} = [0, \tau_{-a,b}]$ para el MB.
- En dimensión $d = 2$, es posible construir $\mathbb{A}_{-a,b}$ cuando $a + b \geq \pi$.
  Cuando $a + b < \pi$, $\mathbb{A}_{-a,b}$ no existe.
- En dimensión $d \geq 3$ no se sabe nada sobre los TVS.
  Ni siquiera se sabe si existen (cualesquiera sean a y b).
- Conjetura:
  Los TVS no existen en $d \geq 3$ (trabajo actual con Avelio Sepúlveda).

¡Gracias por su atención!



Conjuntos de parada del Campo Libre Gaussiano

Workshop **tarK1**

Pablo Zúñiga

pablozuniga [at] ug [dot] uchile [dot] cl

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

24 de julio de 2023