Conjuntos explorables

Seminario de Magíster DIM

Pablo Zúñiga, Avelio Sepúlveda

Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

11 de octubre de 2023

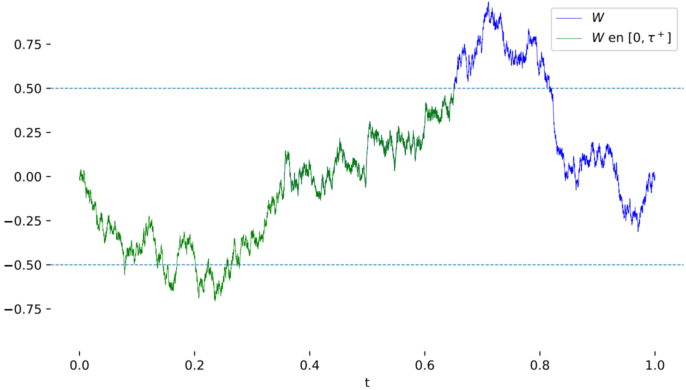
Plan

Puente browniano

Considere un puente browniano $(W_t)_{t\in[0,1]}$ y los tiempos aleatorios

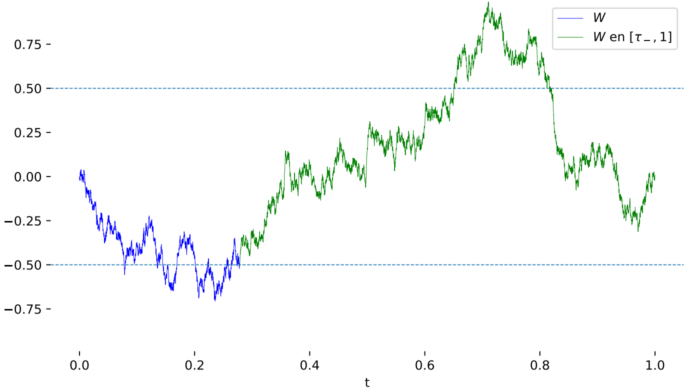
$$\tau^+ = \text{ínf}\{t \in [0,1] : W_t = 0{,}5\} \quad \text{y} \quad \tau_- = \sup\{t \in [0,1] : W_t = -0{,}5\}.$$

Puente browniano



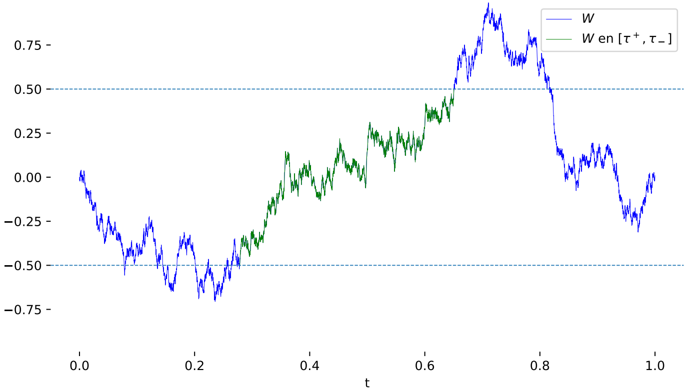
La ley condicional de $(W_t)_{t\in[\tau_+,1]}$ en $[0,\tau_+]$ es la de un puente browniano **independiente** de $(W_t)_{t\in[0,\tau_+]}$.

Puente browniano



Análogamente, la ley condicional de $(W_t)_{t\in[0,\tau_-]}$ en $[\tau_-, 1]$ es la de un puente browniano **independiente** de $(W_t)_{t\in[\tau_-,1]}$.

Puente browniano



La ley condicional de $(W_t)_{t\in[0,\tau_+]}$ en $[0,\tau_+]\cap[\tau_-,1]$ es la de un proceso condicionado a no tocar $x=0,5$. En particular, dicha ley no puede ser la de un puente browniano **independiente** de $(W_t)_{t\in[0,\tau_+]\cap[\tau_-,1]}$.

Puente browniano

Pregunta: ¿Existe alguna noción sobre conjuntos aleatorios que se preserve bajo intersecciones, y tal que sea *razonable* esperar que una basta gama de ejemplos de la teoría lo satisfagan?

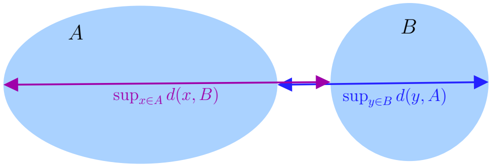
Posible respuesta: Conjuntos explorables.

Conjuntos aleatorios

- $D \subseteq \mathbb{R}^d$ cerrado (dominio temporal d-dimensional).
- $d(\cdot,\cdot)$ la distancia euclidiana.
- $\mathscr{C}(D) = \{$subconjuntos compactos de $D\}$.

¿Cómo podemos definir variables aleatorias a valores en $\mathscr{C}(D)$?
Primer paso: Poner una topología sobre $\mathscr{C}(D)$.

Topología apropiada: **Topología de Hausdorff**.
$d_{\text{Haus}}(A,B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq B_\epsilon \wedge B \subseteq A_\epsilon\}$



Conjuntos aleatorios

Segundo paso: σ-álgebra boreliana.

Ahora dotamos a $\mathscr{C}(D)$ de la σ-álgebra boreliana $\mathcal{B}$.
Es decir, aquella generada por los abiertos de $(\mathscr{C}(D), d_{\text{Haus}})$.

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una función

$$A : \Omega \to \mathscr{C}(D)$$

se dirá **conjunto aleatorio** si es una función $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}$-medible.

Filtraciones y conjuntos de parada

¿Cómo se modela la información cuando el tiempo es d-dimensional?
Respuesta: Filtraciones (análogo al caso unidimensional).

Consideremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

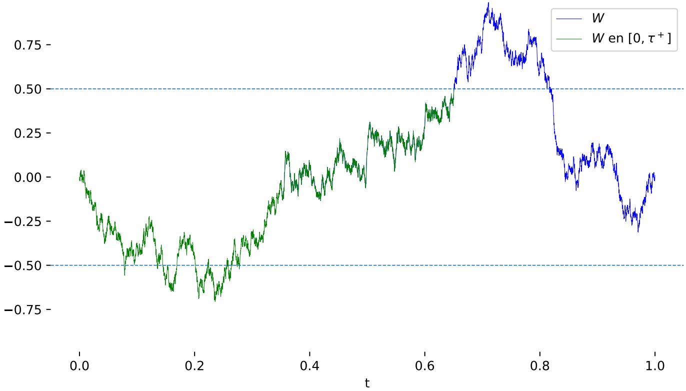
Una colección de σ-álgebras $(\mathcal{F}_C)_{C \in \mathscr{C}(D)}$ se dice filtración si

- $\mathcal{F}_C \subseteq \mathcal{F}$.
- $C_1 \subseteq C_2 \implies \mathcal{F}_{C_1} \subseteq \mathcal{F}_{C_2}$.
- $+$ continuidad por la derecha $+$ completitud.

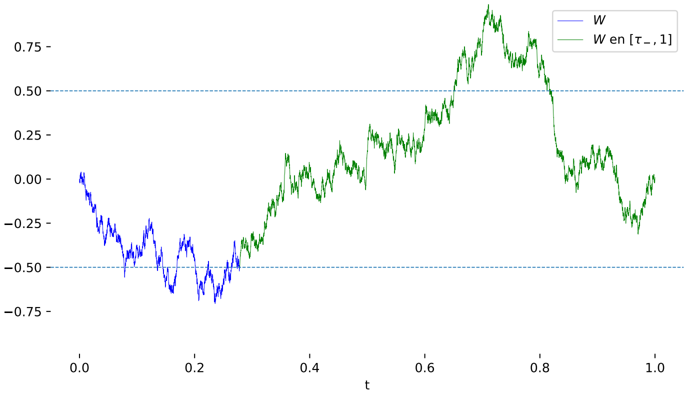
Un conjunto aleatorio A se dirá conjunto de parada si

$$\forall C \in \mathscr{C}(D), \quad \{A \subseteq C\} \in \mathcal{F}_C.$$

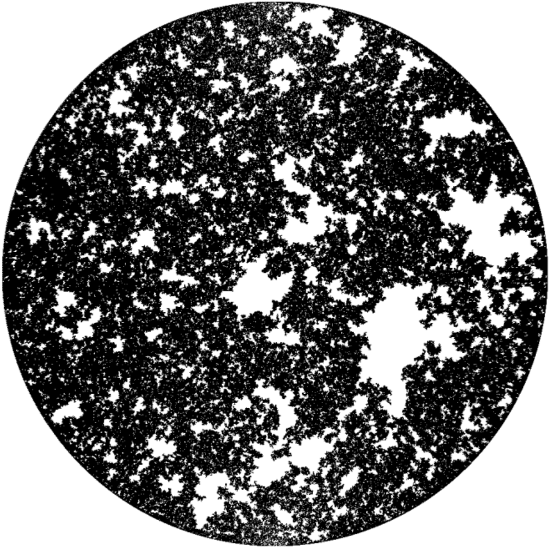
Volviendo al objetivo inicial



Volviendo al objetivo inicial



Volviendo al objetivo inicial



Volviendo al objetivo inicial

Los conjuntos anteriores:

- Son conjuntos de parada.
- Son conexos al borde del dominio temporal.
- Satisfacen que la parte conexa al borde de su intersección con cualquier cerrado sigue siendo conjunto de parada.

Volviendo al objetivo inicial

Los conjuntos anteriores:

- Son conjuntos de parada.
- Son conexos al borde del dominio temporal.
- Satisfacen que la parte conexa al borde de su intersección con cualquier cerrado sigue siendo conjunto de parada.

Componentes conectadas al borde

Definición (Componentes conectadas al borde)

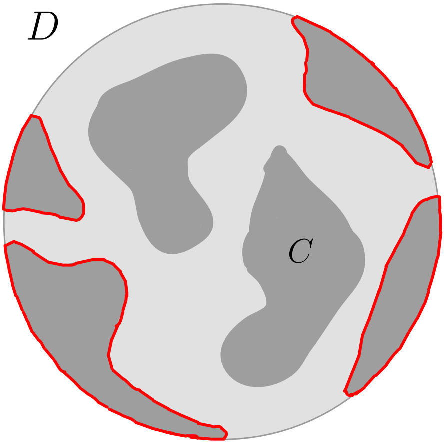
Para $C, E \subseteq D$, se define

$$\mathrm{bcc}^E(C) = \bigcup_{\substack{X \subseteq C \cap \overline{E} \\ X \cup \partial E \text{ es conexo}}} X.$$

Cuando $E = D$, anotamos simplemente $\mathrm{bcc}^D(C) = \mathrm{bcc}(C)$.

1. $\mathrm{bcc}^E(\mathrm{bcc}^E(A)) = \mathrm{bcc}^E(A)$.
2. $\mathrm{bcc}^E(A \cap B) = \mathrm{bcc}^E(\mathrm{bcc}^E(A) \cap \mathrm{bcc}^E(B))$.
3. Para todo $\epsilon > 0$, $\mathrm{bcc}^E(A) \subseteq C \iff \mathrm{bcc}^E(A \cap C_\epsilon) \subseteq C$.

Componentes conectadas al borde



Volviendo al objetivo inicial

Los conjuntos anteriores:

- Son conjuntos de parada.
- Son conexos al borde del dominio temporal.
- Satisfacen que la parte conexa al borde de su intersección con cualquier cerrado sigue siendo conjunto de parada.

Conjunto explorable

Sea $\mathscr{F} = (\mathcal{F}_C)_{C \in \mathscr{C}(D)}$ una filtración.

Definición (Conjunto explorable)

Un conjunto aleatorio A se dice $\mathscr{F}$-explorable para E, si

$$\forall C_0 \in \mathscr{C}(D), \quad \mathrm{bcc}^E(A \cap C_0) \text{ es un conjunto de parada para } \mathscr{F}.$$

Intuitivamente:
Un conjunto es explorable si puede ser descubierto de forma "medible".

Teorema

Si A, B son $\mathscr{F}$-explorables para D, entonces $A \cap B$ es $\mathscr{F}$-explorable para D.

Idea de demostración: Para todo $\epsilon > 0$, se puede ver que

$\{\mathrm{bcc}(A \cap B \cap C_0) \subseteq C\} = \{\mathrm{bcc}(\mathrm{bcc}(A \cap C_0 \cap C_\epsilon) \cap \mathrm{bcc}(B \cap C_0 \cap C_\epsilon)) \subseteq C\} \in \mathcal{F}_{C_\epsilon}$

Intersectando sobre $\epsilon > 0$, se concluye. ■

Más resultados

Proposición (Filtración de un conjunto explorable)

Sea A $\mathscr{F}$-explorable para D. Entonces existe una filtración $\mathscr{G}$ tal que:

- A es $\mathscr{G}$-explorable para D.
- $\mathscr{G}$ es la filtración más pequeña que hace a A explorable.

Idea de demostración: La colección $\mathscr{G} = (\mathcal{G}_C)_{C \in \mathscr{C}(D)}$ dada por

$$\mathcal{G}_C := \overline{\bigcap_{\epsilon > 0} \sigma(\mathrm{bcc}(A \cap C_\epsilon))}^{\mathbb{P}},$$

satisface lo requerido. ■

Más resultados

Proposición (Un conjunto explorable se puede "reiniciar")

Si A es $\mathscr{F}$-explorable para D, entonces para todo $C_0 \in \mathscr{C}(D)$,

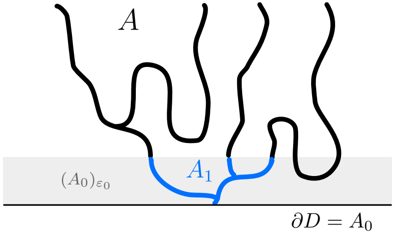
$$A \setminus \mathrm{bcc}(A \cap C_0) \text{ es } \mathscr{F}^{\mathrm{bcc}(A\cap C_0)}\text{-explorable para } D \setminus \mathrm{bcc}(A \cap C_0).$$

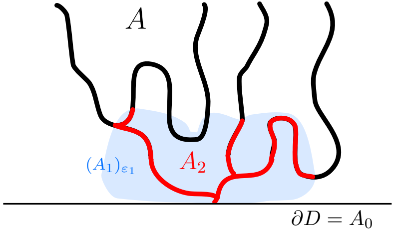
Nota: $\mathcal{F}_C^{\mathrm{bcc}(A\cap C_0)} = \mathcal{F}_{C\cup \mathrm{bcc}(A\cap C_0)}$.

Más resultados

- Suponga que D es compacto.
- Sea A $\mathscr{F}$-explorable para D y tal que $A = \mathrm{bcc}(A)$.
- Sea $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\inf_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n \geq \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$.
- Defina $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\begin{cases} A_0 = \partial D \\ A_n = \mathrm{bcc}^{D\setminus A_{n-1}}(A \cap (A_{n-1})_{\epsilon_{n-1}}) \cup A_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$





Más resultados

Proposición (Aproximando conjuntos explorables)

1. Existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ (aleatorio) tal que $A_N = A$.
2. Para todo $n \geq 1$, A_n es $\mathscr{F}^{A_{n-1}}$-conjunto de parada.

Idea de demostración: Toda sucesión creciente de compactos dentro de un compacto converge en la topología de Hausdorff. Esta convergencia es en finitos pasos pues los engrosamientos son al menos $\epsilon > 0$ (fijo).

La segunda parte es parafrasear de la proposición sobre el reinicio. ■

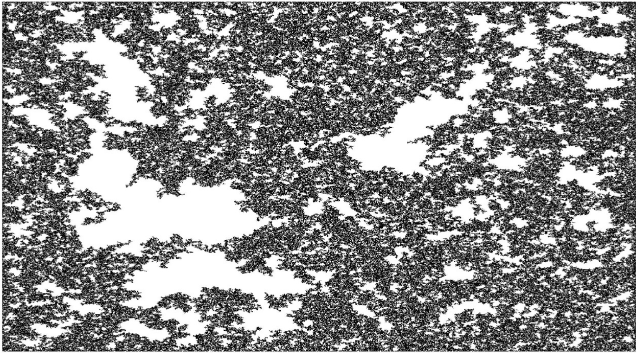
Comentarios finales

- Se espera que una amplia gama de conjuntos aleatorios de la literatura sean explorables.

- Esperamos que la teoría de conjuntos explorables aporte herramientas para el estudio del GFF y otros modelos en Probabilidades.

- Trabajo actual junto a Pablo Araya:
  ¿Cuándo el límite Hausdorff de conjuntos explorables es explorable?
  El límite Hausdorff por sí solo no es suficiente.

¡Gracias por su atención!



Conjuntos explorables

Seminario de Magíster DIM

Pablo Zúñiga, Avelio Sepúlveda

Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

11 de octubre de 2023