Conjuntos de salida del Campo Libre Gaussiano en $\mathbb{R}^d$

Seminario de Magíster DIM

Pablo Zúñiga, Avelio Sepúlveda

Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

11 de octubre de 2023

Resumen

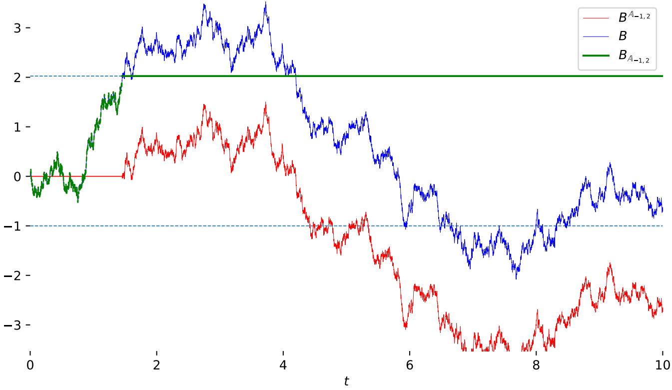
Caso del movimiento browniano

Consideremos

- $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un MB estándar,
- $\tau_{-a,b} := \text{ínf}\{t \geq 0 : B_t \in \{-a, b\}\}$ para $a, b > 0$ fijos,
- $\mathbb{A}_{-a,b} := [0, \tau_{-a,b}]$ (observar que es un intervalo aleatorio).

Caso del movimiento browniano

Notar que B admite la descomposición $B = B_{\mathbb{A}_{-a,b}} + B^{\mathbb{A}_{-a,b}}$.



¿Es posible generalizar estas nociones del tiempo 1-dimensional a uno d-dimensional?

Campo Libre Gaussiano

Definición (Campo Libre Gaussiano)

El **Campo Libre Gaussiano en** D se define como la distribución aleatoria Φ tal que $(\langle \Phi, f \rangle)_{f \in C_c^\infty(D)}$ es un proceso gaussiano de covarianza

$$\mathbb{E}[\langle \Phi, f \rangle \langle \Phi, g \rangle] = \iint_{D^2} f(x) G^D(x, y) g(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \quad \forall f, g \in C_c^\infty(D).$$

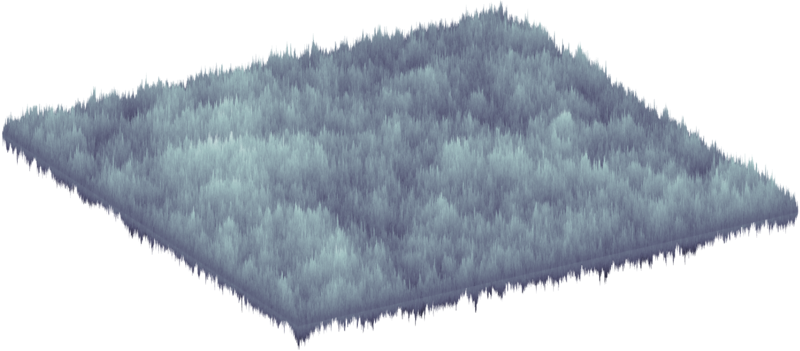
Aquí, G^D es la función de Green de D.

Abreviaremos Campo Libre Gaussiano como GFF por sus siglas en inglés.

Observaciones

- El movimiento browniano es el GFF en $D = [0, \infty)$.
- El puente browniano en $[a, b]$ es el GFF en $D = [a, b]$.
- El GFF en $d \geq 2$ **no** es una función, sino que una distribución.

Simulación de un GFF en $d = 2$



Propiedad de Markov Débil

Consideremos Φ un GFF en $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

Teorema (Propiedad de Markov Débil)

Sea $C \subseteq D$ cerrado y determinista. Entonces existen distribuciones aleatorias Φ_C y Φ^C tales que

- $\Phi = \Phi_C + \Phi^C$,
- Φ_C y Φ^C son independientes,
- Φ_C es una función armónica en $D \setminus C$,
- Φ^C es un GFF en $D \setminus C$.

Propiedad de Markov Fuerte

Diremos que un conjunto aleatorio A es conjunto de parada del GFF si para todo $C \subseteq D$ cerrado,

$$\{A \subseteq C\} \in \sigma(\Phi_B : B \subseteq C \text{ cerrado}).$$

Teorema (Propiedad de Markov Fuerte)

Sea A un conjunto de parada para el GFF. Entonces existen distribuciones aleatorias Φ_A y Φ^A tales que condicionalmente en A,

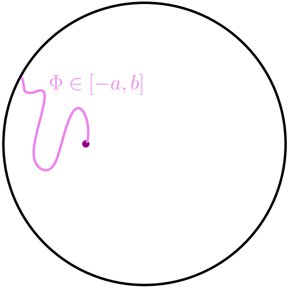
- $\Phi = \Phi_A + \Phi^A$,
- Φ_A y Φ^A son independientes,
- Φ_A es una función armónica en $D \setminus A$,
- Φ^A es un GFF en $D \setminus A$ independiente de Φ_A.

Conjuntos de salida

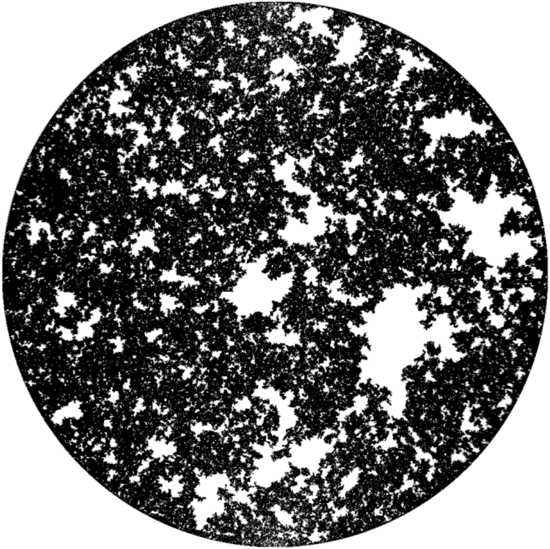
Definición (Conjuntos a dos valores)

Sean $a, b > 0$. El **conjunto a dos valores del GFF de niveles $-a$ y b** se define como el conjunto de parada $\mathbb{A}_{-a,b}$ que satisface

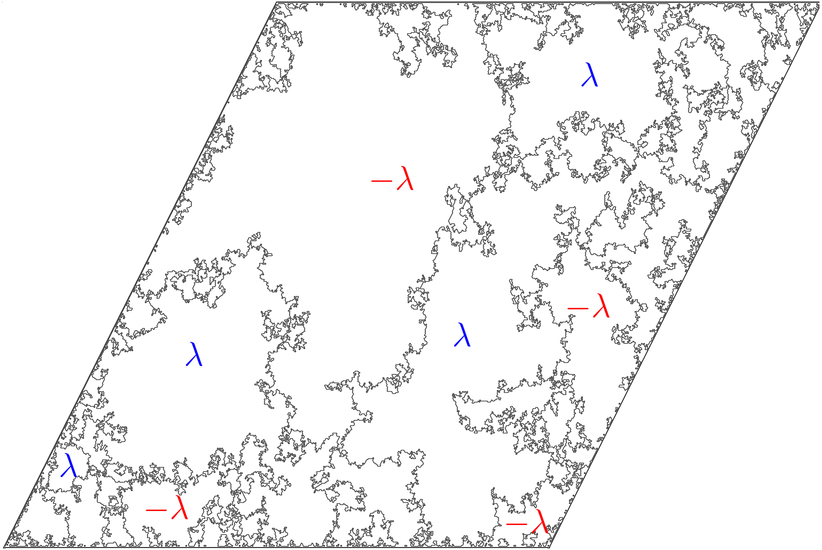
$$\Phi_{\mathbb{A}_{-a,b}}(x) \in \{-a, b\}, \quad \text{para todo } x \in D \setminus \mathbb{A}_{-a,b}.$$



Simulación de $\mathbb{A}_{-\pi,\pi}$



Simulación de $\mathbb{A}_{-\pi/2,\pi/2}$



Existencia de los conjuntos de salida

La existencia de los TVS no es una pregunta sencilla.

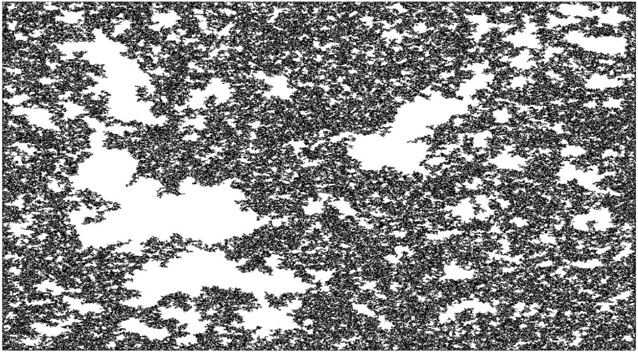
- En dimensión $d = 1$, son simplemente $\mathbb{A}_{-a,b} = [0, \tau_{-a,b}]$.
- En dimensión $d = 2$, es posible construir $\mathbb{A}_{-a,b}$ cuando $a + b \geq \pi$. Cuando $a + b < \pi$, $\mathbb{A}_{-a,b}$ no existe.
- En dimensión $d \geq 3$ no se sabe nada sobre los TVS. Ni siquiera se sabe si existen (cualesquiera sean a y b).

Mi trabajo de tesis

En mi trabajo de tesis, pretendemos:

- Probar la conjetura de la no existencia de los TVS en $d \geq 3$.
- Probar la conjetura de la no existencia de los FPS en $d \geq 7$.
  Los FPS pueden entenderse como los TVS solo con el nivel $-a$.
- Construir los FPS en $d \in \{3, 4, 5, 6\}$.
- Entre otras cosas...

¡Gracias por su atención!



Conjuntos de salida del Campo Libre Gaussiano en $\mathbb{R}^d$

Seminario de Magíster DIM

Pablo Zúñiga, Avelio Sepúlveda

Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

11 de octubre de 2023