MA-53I Tópicos en Matemáticas Discretas I

Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi, M. Loebl, y M. Matamala

PROBLEMA 1:

(Si lo requiere puede hacer uso de resultados que no se hayan visto en el curso. En dicho caso enuncie el resultado que utilice y de la referencia que corresponda).

Sea $M = (M_{i,j})_{i,j}$ una matriz de m por m tal que $M_{i,j} \in \{-1, 1\}$. Sea

$$\alpha(m) \quad = \quad \min_{M_{i,j}=\pm 1} \max_{x_i, y_j = \pm 1} \sum_{i,j=1}^{m} M_{i,j} x_i y_j \,.$$

(i).- Pruebe que $\alpha(m) \leq c \cdot m^{3/2}$, para $c = 2\sqrt{\ln 2}$.

Indicación: Recuerde que:

Teorema 1 [Cota de Chernoff] *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que $\mathbb{P}(X_i = +1/2) = \mathbb{P}(X_i = -1/2) = 1/2$, y sea $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Si $a > 0$, entonces*

$$\mathbb{P}(S_n > a) \quad < \quad e^{-2a^2/n} \,.$$

(ii).- Pruebe que $\alpha(m) \geq (c' - o(1))m^{3/2}$, para $c' = \sqrt{2/\pi}$, donde la notación asintótica es con respecto a m.

Indicación: Pruebe que cualquiera sea M e $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \mathbb{E}_{\vec{y}} \left(|(M\vec{y})_i| \right) \quad = \quad c' \,,$$

donde la esperanza es sobre los $\vec{y} \in_R \{-1, 1\}^m$

(iii).- De un algoritmo a tiempo polinomial para determinar $\vec{x}, \vec{y} \in \{-1, 1\}^m$ tales que

$$\vec{x}^T M \vec{y} \quad \geq \quad (c' - o(1))m^{3/2} \,.$$

(iv).- Pruebe que

Lema 1 *Si $X_1, \ldots, X_m$ son variables aleatorias 4-independientes que toman los valores -1 y 1 con probabilidad $1/2$ entonces*

$$\mathbb{E}\left(\left| \sum_{i=1}^{m} X_i \right| \right) \quad \geq \quad \sqrt{\frac{m}{3}} \,.$$

<u>Indicación</u>: Utilice que para todo $q > 0$ se tiene que $x \geq \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{q}}\left(x^2 - \frac{x^4}{q}\right)$ y elija adecuadamente q en términos de m.

(v).- Basado en la parte anterior, de un algoritmo paralelo para determinar $\vec{x}, \vec{y} \in \{-1,1\}^m$ tales que

$$\vec{x}^T M \vec{y} \quad \geq \quad \frac{m^{3/2}}{\sqrt{3}}\,.$$

<u>Indicación</u>: Asuma que los cálculos matriciales son paralelizables.