MA-53I Tópicos en Matemáticas Discretas I **17 de Abril, 1999**

Control No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi, M. Loebl, y M. Matamala

TIEMPO: 4.0 HRS.

PROBLEMA 1: Se dice que $l\colon \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ es *lineal* si $l(x+y) = l(x)+l(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{F}_2^n$. El conjunto de funciones lineales de $\mathbb{F}_2^n$ en $\mathbb{F}_2$ se denota por $\mathcal{L}(\mathbb{F}_2^n, \mathbb{F}_2)$. Dados dos funciones f y g tales que $f, g\colon \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ se define la *distancia de f a g* por

$$D(f,g) = \mathbb{P}_{x \in_R \mathbb{F}_2^n}\left(f(x) \neq g(x)\right) = \frac{1}{|\mathbb{F}_2^n|} \sum_{x \in \mathbb{F}_2^n} \mathbb{I}_{\{\omega : f(\omega) \neq g(\omega)\}}(x)\,.$$

Pruebe que toda función de $\mathbb{F}_2^n$ en $\mathbb{F}_2$ está a una distancia de a lo más $1/2$ del espacio de funciones lineales de $\mathbb{F}_2^n$ en $\mathbb{F}_2$, i.e. pruebe el siguiente

Teorema 1 *Si $f\colon \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$, entonces existe $l \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_2^n, \mathbb{F}_2)$ tal que $D(f, l) \leq 1/2$.*

<u>Indicación</u>: Pruebe que

1. $l \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_2^n, \mathbb{F}_2)$ sí y sólo si $\exists \alpha \in \mathbb{F}_2^n$, tal que $l(x) = l_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i$ (aritmética en $\mathbb{F}_2$).
2. Para todo $b \in \mathbb{F}_2$ y $x \in \mathbb{F}_2^n$, si $x \neq 0$, entonces $\mathbb{P}_{\alpha \in_R \mathbb{F}_2^n}\left(l_\alpha(x) = b\right) = 1/2$.

PROBLEMA 2: Elija uno de los dos siguientes resultados y pruebelo.

Teorema 2 *Sea $n = 2^k - 1$ y $d = 2t+1$. Existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $|\Omega| = 2(n+1)^t$ y variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ d-independientes que toman valores 0 y 1 con probabilidad $1/2$. Además, tanto el espacio muestral como las variables aleatorias se pueden construir explícitamente dada una representación de $\mathbb{F}_{2^k}$ como un espacio vectorial k-dimensional sobre $\mathbb{F}_2$.*

Teorema 3 *Sea d un entero positivo par. Si las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ sobre el espacio muestral Ω son d-independientes y ninguna es constante con probabilidad 1, entonces*

$$|\Omega| \geq \sum_{j=0}^{d/2} \binom{n}{j}\,.$$

PROBLEMA 3: Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es *β-arco–expansivo* si para cualquier subconjunto $S \subset V$ tal que $|S| \leq |V|/2$ se tiene que

$$E(S, V \setminus S) \stackrel{\text{def}}{=} |\{(u,v) \in E : u \in S, v \in V \setminus S\}| \geq \beta |S|\,.$$

Sea $G=(V,E)$ un grafo d-regular β-arco–expansivo. Pruebe que los arcos de G se pueden particionar en E_0 y E_1 tales que cada E_i es el conjunto de arcos de un grafo aproximadamente $\beta/2$-arco–expansivo en el mismo conjunto de vértices. Para ello, siga los siguientes pasos:

(i).- Pruebe que si $|E_i(S,V\setminus S)|\geq\beta(\frac{1}{2}-\epsilon)|S|$ para todo $S\subset V$ tal que $|S|\leq|V|/2$ y $G|_S$ es conexo, entonces también se cumple para todo $S\subset V$ tal que $|S|\leq|V|/2$.

(ii).- Pruebe el siguiente

Teorema 4 [Cota de Chernoff] *Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias independientes tales que $\mathbb{P}\left(X_i=+1/2\right)=\mathbb{P}\left(X_i=-1/2\right)=1/2$, y sea $S_n=X_1+\ldots+X_n$. Si $a>0$, entonces*

$$\mathbb{P}\left(S_n>a\right) \quad < \quad e^{-2a^2/n}\,.$$

Concluya que con probabilidad a lo más $e^{-2a^2/n}$ una binomial de parámetros $(n,1/2)$ tome un valor mayor que $\frac{n}{2}+a$.

<u>Indicación</u>: Observe que $\mathbb{P}\left(S_n>a\right)=\mathbb{P}\left(e^{4a\cdot S_n/n}>e^{4a^2/n}\right)$ y que $(e^{\lambda}+e^{-\lambda})/2\leq e^{\lambda^2/2}$.

(iii).- Cada arco de E se coloca en E_0 o E_1, con probabilidad $1/2$, siendo la elección para cada arco independiente. Par cada subconjunto conexo S tal que $|S|\leq|V|/2$, sea A_S el evento correspondiente a

$$E_0(S,V\setminus S)\ <\ \beta(\frac{1}{2}-\epsilon)|S|\,,\qquad \text{o}\qquad E_1(S,V\setminus S)\ <\ \beta(\frac{1}{2}-\epsilon)|S|\,.$$

Pruebe que $\mathbb{P}\left(A_S\right)\leq 2e^{-2\epsilon^2\beta|S|}$.

(iv).- Pruebe el siguiente

Teorema 5 [Lema Local – Caso Asimétrico] *Sea D un digrafo de dependencias para los eventos $A_1,\ldots,A_n$, sean $t_1,\ldots,t_n\geq 1$, y $0\leq p<1/8$. Se tiene que,*

$$\mathbb{P}\left(A_i\right)\ \leq\ p^{t_i}\,,\quad y\quad \sum_{j:(i,j)\in E(D)}(2p)^{t_j}\ \leq\ \frac{t_i}{2}\,,\qquad \forall\, i\in\{1,\ldots,n\}\qquad\Longrightarrow\qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c\right)\ >\ 0\,.$$

<u>Indicación</u>: Use que si $0\leq x_i\leq 1/4$ entonces $1-x_i\geq e^{-6x_i/5}$ y que $2e^{-3/5}\geq 1$.

(v).- Asuma (sin demostrarlo) que dado $S\subset V$ hay en el digrafo de dependencias para los eventos $A_{S'}$ a lo más $(ed)^t|S|$ eventos $A_{S'}$ tales que $|S'|=t$, $G|_{S'}$ es conexo, y hay un arco en el digrafo de dependencias entre los nodos asociados a A_S y $A_{S'}$.

Concluya el siguiente

Teorema 6 *Para todo $\epsilon>0$, $d\geq 3$, y β tal que $\sum_{t\geq 1}(4de^{1-2\epsilon^2\beta})^t\leq 1/2$, si $G=(V,E)$ es un grafo d-regular β-arco–expansivo, entonces hay una partición $E=E_0\cup E_1$ tal que (V,E_0) y (V,E_1) son grafos $\beta(\frac{1}{2}-\epsilon)$-arco-expansivos.*

<u>Indicación</u>: Utilice el Lema Local (Caso Asimétrico) con $p=2e^{-2\epsilon^2\beta}$ y $t_S=|S|$.