Ma53I Tópicos en Matemáticas Discretas **18 de Abril de 2005**

Tarea: Método Probabilista

Prof. Cátedra: M. Kiwi

Plazo: 18:00 HRS DEL 2 DE MAYO DE 2005

PROBLEMA 1: Pruebe que existe una constante $c > 0$ con la siguiente propiedad. Sea A una matriz de $n \times n$ cuyas coordenadas son todas distintas. Entonces, existe una permutación de las filas de A tal que ninguna columna en la matriz permutada contiene una subsecuencia creciente de largo al menos $c\sqrt{n}$.

PROBLEMA 2: Sea $p > n > 10m^2$, donde p es primo, y sean $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m < p$ enteros. Pruebe que hay un entero x, $0 < x < p$ tal que los siguientes m números son distintos:

$$((xa_i) \pmod{p}) \pmod{n}, \qquad 1 \leq i \leq m\,.$$

PROBLEMA 3: Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de $N = \{1, \ldots, n\}$, y suponga que no hay $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subset B$. Sea $\sigma \in S_n$ una permutación aleatoria de los elementos de N y considere la variable aleatoria

$$X = |\{i \,:\, \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\} \in \mathcal{F}\}|\,.$$

Determine la esperanza de X y pruebe que $\mathcal{F} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

PROBLEMA 4:

(i).- El número de van der Waerden $W(k)$ es el mínimo n tal que todo 2–coloreamiento de los enteros $\{1, \ldots, n\}$ contiene un progresión aritmética monocromática de largo k. Pruebe que el número esperado de progresiones aritméticas en un 2-coloreamiento aleatorio de $\{1, 2, \ldots, n\}$ es a lo mas $n(n-1)2^{-k+1}/(k-1)$. Deduzca que $W(k) \geq 2^{k/2}\sqrt{(k-1)/2}$.

(ii).- Concluya que $W(k) \geq (k-1)2^{k-1}/(ek^2)$.

PROBLEMA 5: Sea $\mathcal{F}$ una familia de grafos en n vértices etiquetados, y suponga que $\mathcal{F}$ es monótona, i.e., si $F \in \mathcal{F}$ y G contiene todos los arcos de F, entonces $G \in \mathcal{F}$. Sean $\epsilon > 0$ y $0 < p < 1$. Suponga que la probabilidad que un grafo aleatorio elegido de acuerdo a $G(n,p)$ pertenezca a $\mathcal{F}$ es ϵ. Pruebe que sea $q = \min\{1, p\lceil \epsilon^{-1} \ln(1/\epsilon)\rceil\}$, entonces la probabilidad que un grafo aleatorio elegido de acuerdo a $G(n,q)$ pertenezca a $\mathcal{F}$ es al menos $1 - \epsilon$.

PROBLEMA 6: Diseñe un algoritmo que dado n construya en tiempo polinomial en n una familia $\mathcal{F}$ de n^{10} subconjuntos de $N = \{1, \ldots, n\}$, donde cada $F \in \mathcal{F}$ es de tamaño $10\log_2 n$ y para toda familia $\mathcal{G}$ de n subconjuntos de N cada uno de tamaño $n/2$, existe $F \in \mathcal{F}$ que intersecta a todos los miembros de $\mathcal{G}$.