Ma5201 Complejidad Computacional **04 de Junio de 2016**

Control 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: S. Pérez*

TIEMPO: 5 HRS 15 MIN

PROBLEMA 1:

(i).- (3.0 pts) Sea 3B3SAT el conjunto de instancias $\langle \phi \rangle \in$ 3SAT tales que cada variable aparece en ϕ a lo más 3 veces. Pruebe que 3B3SAT es NP-difícil.

(ii).- (3.0 pts) Se define $3\text{VC} = \{\langle G, k\rangle \in \text{VC} : \text{grado máximo de } G \text{ es } 3\}$. Pruebe que 3VC es NP-difícil.

PROBLEMA 2:

(i).- (3.0 pts) Sea LinProg el conjunto de instancias $\langle A, b\rangle$ donde $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, y tal que existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax \leq b$. Pruebe que LinProg es P-difícil.

(ii).- Se define LinSpace $=$ DEspacio(n).

(ii.1).- (1.0 pts) Para $L \in$ DEspacio(f) donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es tal que $f(n) = n^2$. Considere $\# \notin \Sigma_L$ y defina $L_f = \{\omega || \#^{f(n)-n} : \omega \in L, |\omega| = n\}$. Pruebe que $L_f \in$ DEspacio(n).

(ii.2).- (1.5 pts) Pruebe que P $\neq$ LinSpace.

(ii.3).- (0.5 pts) De la parte anterior ¿se deduce que P $\neq$ PESPACIO? Justifique.

PROBLEMA 3:

(i).- (3.0 pts) Sea $\mathcal{C}$ una clase de lenguajes y $\mathcal{M}$ una colección de máquinas de Turing, denotamos por $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ al conjunto de lenguajes L tal que $\exists M \in \mathcal{M}$ y un oráculo $O \in \mathcal{C}$ tales que M^O decide L. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{NP}$ el conjunto de máquinas de Turing deterministas y no-deterministas a tiempo polinomial, respectivamente. Pruebe que $\mathcal{P}^{\text{PESPACIO}} = \mathcal{NP}^{\text{PESPACIO}}$.

<u>Indicación</u>: $\mathcal{NP}^{\text{PESPACIO}}$ es igual a una de las clases de complejidad conocidas.

(ii).- (3.0 pts) Un *branching program* B es un digrafo acíclico $G^B = (V^B, E^B)$ donde cada nodo esta etiquetado. por una variable. Hay dos conjuntos de nodos $\mathcal{T}_0^B$ y $\mathcal{T}_1^B$ denominanados *sumideros*. Los nodos en $\mathcal{T}_b^B$ están etiquetados por $b \in \{0,1\}$. Los nodos $v \in V^B \setminus (\mathcal{T}_0^B \cup T_1^B)$ se denominan de *consulta* y se etiquetan con variables Booleanas – denotaremos x_v la etiqueta de v. De cada nodo de consulta salen dos arcos, uno etiquetado con 0 y el otro con 1. A los sumideros sólo llegan arcos. Uno de los nodos de consulta del digrafo se denomina *fuente* y lo denotaremos por S^B. El branching program B determina una función Booleana f_B de la siguiente forma: Dada una asignación de valores Booleanos $\vec{a}$ para las variables x_v con $v \in V^B \setminus \{T_0^B, T_1^B\}$, se tiene que $f_B(\vec{a}) = 1$ si y sólo si partiendo de S^B y siguiendo en cada nodo de consulta v el arco de salida con etiqueta a_v eventualmente se llega a un nodo en $\mathcal{T}_1^B$. El tamaño de un branching program B se denota $|B|$ y corresponde al número de nodos del grafo G^B.

Se dice que $L \subseteq \{0,1\}^*$ es decidido por una familia de branching programs $\mathcal{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \omega \in \{0,1\}^n$, $\omega \in L$ si y sólo si $f_{B_n}(\omega) = 1$

Pruebe que si $L \in \mathrm{Log}$, entonces existe un polinomio $p(\cdot)$ y una familia de branching programs $\mathcal{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que decide L tal que $|B_n| = O(p(n))$.

Indicación: Considere un grafo cuyos nodos son pares (D,t) cada uno representando una descripción instantánea D en el instante t.