Ma5201 Complejidad Computacional	**20 de Abril de 2013**
Control 1	
Prof. Cátedra: M. Kiwi	*Prof. Auxiliar: P. Muñoz, D. Salas*

TIEMPO: 6.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (2.0 pts) Sea L lenguaje. Se define,

$$\text{Swap}(L) = \{\omega_2\omega_1 \ldots \omega_{2i}\omega_{2i-1} \ldots \omega_{2n}\omega_{2n-1} : \omega = \omega_1 \ldots \omega_{2n} \in L\}.$$

Pruebe que si L es regular, entonces $\text{Swap}(L)$ es regular.

(ii).- (2.0 pts) Sea L el lenguaje consistente en secuencias de 0's y 1's que contienen una subcadena con al menos cuatro 1's más que 0's, i.e. la colección de ω's en $\{0,1\}^*$ para los que existen $1 \leq i \leq j \leq |\omega|$ tales que

$$\sum_{s=i}^{j} \omega_s + 4 \geq \sum_{s=i}^{j} (1 - \omega_s).$$

Determine si L es o no regular (justifique su respuesta).

(iii).- (2.0 pts) Sea L un lenguaje. Se define, el sublenguaje libre de prefijos propios de L por

$$\text{NPR}(L) = \left\{\omega \in L : \omega = \omega'\omega'' \text{ tales que si } \omega'' \neq \varepsilon, \text{ entonces } \omega' \notin L\right\}.$$

Pruebe que si L es regular, entonces $\text{NPR}(L)$ también lo es.

PROBLEMA 2: Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ. Se define sobre Σ^* la relación $\equiv_L$ por

$$x \equiv_L y \iff \forall z \in \Sigma^*, (xz, yz \in L) \vee (xz, yz \notin L).$$

(i).- (1.5 pts) Pruebe que $\equiv_L$ es una relación de equivalencia sobre Σ^*.

(ii).- (3.0 pts) La cardinalidad de $\Sigma^* / \equiv_L$ se conoce como el índice de L. Pruebe que el Teorema de Myhill-Nerode, i.e. L es regular si y solo si L tiene índice finito.

(iii).- (1.5 pts) Pruebe sin usar el Lema del Bombeo que $L = \{0^n 1^n : n \geq 1\}$ no tiene índice finito.

PROBLEMA 3:

(i).- Dada una secuencia $\omega = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_n$, denotamos por $\omega^{\mathcal{R}}$ a la secuencia $\omega_n\omega_{n-1} \ldots \omega_1$.

(i.1).- (1.5 pts) Pruebe que el siguiente lenguaje es decidible

$$L = \left\{\langle A \rangle : A \text{ es un autómata finito determinista y existe } \omega \in L_A \text{ tal que } \omega^{\mathcal{R}} \in L_A\right\}.$$

(i.2).- (1.5 pts) Pruebe que el siguiente lenguaje es indecidible,

$$L = \left\{ \langle M, \omega \rangle \,:\, \text{si } M \text{ acepta } \omega \text{, entonces } M \text{ acepta } \omega^{\mathcal{R}} \right\}.$$

(ii).- Sea A un lenguaje reconocible consistente en codificaciones de máquinas de Turing, $A = \{\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle, \ldots\}$.

(ii.1).- (1.5 pts) Pruebe que existe un lenguaje reconocible B consistente en codificaciones de máquinas de Turing, $B = \{\langle M'_1 \rangle, \langle M'_2 \rangle, \ldots\}$, tal que: (1) para todo $i \in \mathbb{N}$ y $C > 0$, existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $L_{M'_j} = L_{M_i}$ y $|\langle M'_j \rangle| \geq |\langle M_i \rangle| + C$, y (2) para todo $j \in \mathbb{N}$, existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $L_{M_i} = L_{M'_j}$.

<u>Indicación</u>: Pruebe primero que para toda máquina de Turing M y todo $C > 0$, existe otra máquina de Turing M' tal que $L_M = L_{M'}$ y $|\langle M' \rangle| \geq |\langle M \rangle| + C$. Luego, utilice el hecho que los lenguajes reconocibles son enumerables.

(ii.2).- (1.5 pts) Pruebe que existe un lenguaje decidible D, también consistente en codificaciones de máquinas de Turing, $D = \{\langle M''_1 \rangle, \langle M''_2 \rangle, \ldots\}$, tal que para todo $\langle M_i \rangle \in A$, existe un $\langle M''_j \rangle \in D$ tal que $L_{M''_j} = L_{M_i}$, y vice versa.