Ma50b Complejidad Computacional **11 de Julio de 2005**

Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: J. Soto*

TIEMPO: 3.5 HRS.

PROBLEMA 1: (40%)

(i).- (3.0 pts) Sea $\frac{1}{2}CLIQUE$ el lenguaje tal que $\langle G\rangle \in \frac{1}{2}CLIQUE$ si G es un grafo no dirigido que posee un clique de tamaño al menos $|V(G)|/2$. Pruebe que $\frac{1}{2}CLIQUE$ es NP–completo.

(ii).- (3.0 pts) Sea SECUENCIAR el lenguaje tal que $\langle T,D,P,k\rangle \in$ SECUENCIAR donde $k \in \mathbb{N}$, $T = \{t_1,\ldots,t_r\} \subseteq \mathbb{N}$ es una colección de tiempos, $D = \{d_1,\ldots,d_r\} \subseteq \mathbb{N}$ es una colección de plazos, y $P = \{p_1,\ldots,p_r\} \subseteq \mathbb{N}$ es una colección de penalizaciones, tales que existe una permutación π de $\{1,\ldots,r\}$, donde si $J = \left\{ j : \sum_{i=1}^{j} t_{\pi(i)} > d_{\pi(j)} \right\}$, entonces

$$\sum_{j\in J} p_{\pi(j)} \leq k\,.$$

Pruebe que SECUENCIAR es NP–completo.

<u>Indicación</u>: Pruebe que SUBSET$-$SUM $\leq_P$ SECUENCIAR.

PROBLEMA 2: (30%) Pruebe que MIP $\subseteq$ NEXP.

PROBLEMA 3: (30%)

Dado que NP $=$ PCP$(\log n, 1)$ se tiene que para todo $L \in$ NP hay constantes $c, c', q > 0$ y una función $r(n) \leq c\log n + c'$ tal que existe un verificador V y un oráculo Π para los que se tiene que:

- Si $\omega \in L$, entonces $\mathbb{P}_\rho\left(V^{\Pi}(\omega,\rho) = acep\right) = 1$,
- Si $\omega \notin L$, entonces para todo $\widetilde{\Pi}$, $\mathbb{P}_\rho\left(V^{\widetilde{\Pi}}(\omega,\rho) = acep\right) < 1/3$,

donde las probabilidades están tomadas sobre los $\rho \in \{0,1\}^{r(|\omega|)}$ y V accede a lo más a q bits del oráculo en cualquier entrada y para cualquier secuencia de lanzamiento de monedas.

Sean $n = |\omega|$ y $\Omega = \{0,1\}^{r(n)} \times \{0,1\}^q$. Denotaremos por $q_i(\rho)$ la i–ésima consulta al oráculo que realiza el verificador en la entrada ω y secuencia de lanzamientos de moneda ρ. Diremos que $(\rho,\vec{a}) \in \Omega$ es de aceptación, donde $\vec{a} = (a_1,\ldots,a_q)$, si suponiendo que la respuesta a $q_i(\rho)$ es el bit a_i, se tiene que el verificador V acepta. Diremos que $(\rho,\vec{a}),(\rho',\vec{a'}) \in \Omega$ son consistentes si $\rho \neq \rho'$ y cuando $q_i(\rho) = q_j(\rho')$ entonces se tiene que $a_i = a'_j$.

Sea $G_\omega = (V_\omega, E_\omega)$ el grafo tal que $V_\omega = \Omega$ y $uv \in E$ si y sólo si $u = (\rho,\vec{a})$ y $v = (\rho',\vec{a'})$ son ambos de aceptación y consistentes.

(i).- (1.2 pts) Argumente que G_ω es un grafo no dirigido y que existe una máquina de Turing que en la entrada ω lo puede construir en tiempo polinomial.

(ii).- (1.2 pts) Pruebe que G_ω tiene cliques de tamaño a lo más $2^{r(n)}$.

(iii).- (1.2 pts) Pruebe que si $\omega \in L$, entonces G_ω tiene un clique de tamaño $2^{r(n)}$.

(iv).- (1.2 pts) Pruebe que si G_ω tiene un clique de tamaño $p2^{r(n)}$, entonces existe un oráculo Π tal que

$$\mathbb{P}_\rho\left(V^\Pi(\omega,\rho) = acep\right) \geq p\,.$$

(v).- (1.2 pts) Concluya que

- Si $\omega \in L$, entonces G_ω tiene un clique de tamaño $2^{r(n)}$,
- Si $\omega \notin L$, entonces G_ω no tiene cliques de tamaño $2^{r(n)}/3$,

y que por lo tanto, salvo que NP $=$ P, no existe un algoritmo de 3–aproximación a tiempo polinomial para determinar el tamaño máximo de un clique en un grafo.