MA50B Complejidad Computacional	**10 de Junio, 2002**

Tarea 1 (Opcional)

Profesor: M. Kiwi — **Auxiliar: E. Moreno**

Fecha entrega: Comienzo de la cátedra del 24 de Junio.
-1.0 pts por día de atraso.

Acerca de la colaboración

Está permitido colaborar, pero bajo las siguientes condiciones:

- En la resolución de cada problema pueden trabajar en grupos de a lo más 3 personas y debe señalarse quienes fueron éstas.
- La redacción de las respuestas debe ser absoluta y completamente individual.
- No se permite comparar, comentar, o discutir de cualquier forma, las respuestas obtenidas con otras personas que hayan buscado soluciones separadamente.
- Una vez resuelto un problema no se permite comentar, discutir, o dar indicaciones acerca de la resolución del mismo a personas que no las hayan obtenido.
- Obviamente no se permite fotocopiar, copiar, leer, etc., respuestas de otras personas, aunque hayan trabajado conjuntamente en su obtención.

Elija 4 de los siguientes 5 problemas

PROBLEMA 1: Sean $x_1, \ldots, x_n$ variables Booleanas.

(i).- Pruebe que $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ puede ser calculada por un *branching program* con $O(n)$ nodos.

(ii).- Pruebe que $\mathsf{May}(x_1, \ldots, x_n)$ puede ser calculada por un *branching program* con $O(n^2)$ nodos.

Nota: $\mathsf{May}(x_1, \ldots, x_n) = 1 \iff |\{i : x_i = 1\}| \geq n/2$.

(iii).- Pruebe que cualquier función Booleana $f(x_1, \ldots, x_n)$ puede ser calculada por un *branching program* con $O(2^n)$ nodos.

PROBLEMA 2:

(i).- Pruebe que si P = NP, entonces PH = P.

(ii).- Pruebe que se PH = PESPACIO, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que PH $= \Sigma_k^P$.

(iii).- Usando la notación y resultados de la Pregunta 2 del Control 2. Pruebe primero que si $S(n) \geq \log_2 n$, entonces

$$TIEMPO(2^{O(S(n))}) \quad \subseteq \quad AESPACIO(S(n))\,. \tag{1}$$

Concluya que $\mathrm{P} = AL \stackrel{\text{def}}{=} AESPACIO(\log n)$.

<u>Indicación</u>: Para probar (1), considere M mT a tiempo $2^{O(S(n))}$ con una sola cinta. Observe que que los contenidos de la celda (i, j) de una tabla de cómputo para M en la entrada ω es correcta si *existen* contenidos para las celdas $(i-1, j-1)$, $(i-1, j)$ y $(i-1, j+1)$ que en una transición de M dan lugar a los contenidos de la celda (i, j), y que los contenidos de *todas* las celdas $(i-1, j-1)$, $(i-1, j)$ y $(i-1, j+1)$ son los correctos.

PROBLEMA 3:

Sea $B \subseteq \{(,),[,]\}$ el lenguaje de secuencias de paréntesis y corchetes bien formados (e.g., $([()()]()[]) \in B$ y $([)] \notin B$). Pruebe que $B \in \mathrm{L}$.

PROBLEMA 4:

(i).- Sea $SPLIT{-}SET$ el conjunto de los $\langle \mathcal{C}, S\rangle$ donde $\mathcal{C}$ es una colección finita de subconjuntos de S, tal que existen S_1 y S_2 partición de S para la cual $C \not\subseteq S_1$ y $C \not\subseteq S_2$ cualquiera sea $C \in \mathcal{C}$.

Pruebe que $SPLIT{-}SET$ es NP-completo.

<u>Indicación</u>: Reduzca desde $3SAT$.

(ii).- Sea $NET{-}SURV$ el conjunto de los $\langle G, \rho, q\rangle$ donde $G = (V, E)$ es un grafo no–dirigido, $\rho : V \cup E \to \mathbb{Q}$ y $q \in \mathbb{Q}$, tales que si que todos los arcos y nodos de G tienen probabilidad de falla dadas por ρ e independientes unas de otras, entonces la probabilidad que para todo $(u, v) \in E$ al menos u o v o (u, v) fallen es mayor o igual a q.

Pruebe que $NET{-}SURV$ es NP-duro.

<u>Indicación</u>: Reduzca desde $VERTEX{-}COVER$.

PROBLEMA 5:

(i).- Pruebe que si $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{BPP}$, entonces $\mathrm{RP} = \mathrm{NP}$

<u>Indicación</u>: Observe que si $\mathrm{NP} = P$, entonces para todo $\langle\phi\rangle \in SAT$ se puede encontrar en tiempo polinomial una asignación de valores de verdad que haga cierta a ϕ.

(ii).- Pruebe que BPP es cerrada bajo unión e intersección.