MA47A Optimización Combinatorial

Distribución horaria: 2 cátedras + 1 auxiliar por semana

Requisitos: MA37A Optimización

Objetivos: Presentar los algoritmos clásicos para problemas combinatoriales en grafos, ilustrando principios generales de diseño de algoritmos e incorporando la noción de eficiencia computacional. Entregar elementos para reconocer la complejidad computacional de un problema de optimización discreta, y presentar algunas técnicas básicas para resolver problemas NP-duros.

Programa

Los conceptos, estructuras de datos, y nociones básicas de grafos requeridas para cubrir los tópicos listados en lo que sigue se introducirán a medida que se necesiten.

1. El Problema del Árbol Generador de Peso Mínimo
   Algoritmos de Kruskall y Prim vistos como un caso particular de un algoritmo genérico de construcción de un árbol de peso mínimo. Discusión de los algoritmos vistos como ilustración de una heurística de optimización basada en la estrategia glotona. Mejoras y eficiencia computacional.

   Referencias: [CLR90, Cap. 24 y 17§ 2], [PS82, Cap. 12, § 1–3], [KE06, Cap. 4], [KV10, Cap. 6].

2. El Problema del Camino más Corto
   Algoritmo de Bellman visto como una ilustración de un método genérico de diseño de algoritmos basado en programación dinámica. Algoritmos de Dijkstra, Bellman-Ford y Floyd-Warshall. Eficiencia computacional. Determinación de un conjunto maximal de rutas más cortas disjuntas en el sentido de los nodos.

   Referencia: [CLR90, Cap. 16§ 2, 25, 26], [KE06, Cap. 6], [KV10, Cap. 7].

3. Problemas de Flujo

   - Problema de Flujo Máximo
     El teorema del flujo máximo y corte mínimo. Algoritmo de Ford-Fulkerson: el problema de la finitud del algoritmo y el Teorema de integralidad. Algunas mejoras del algoritmo de $F - F$; los algoritmos de Edmonds y Karp, y algún algoritmo más avanzado para problemas de flujo máximo.
     Referencias: [CLR90, Cap. 27], [KV10, Cap. 8].
   - Problema del Flujo de Costo Mínimo
     Equivalencia con el problema de la circulación de costo mínimo. El problema de flujo de costo máximo como un caso particular del problema de flujo de costo mínimo. Problema de transporte.
     Referencia: [Sak84, Cap. 5], [KV10, Cap. 9].

4. El Problema del Cuplaje (Matching)
   Cuplajes de cardinalidad máxima en grafos bipartitos. Algoritmo de Hopcroft y Karp. Cuplajes de peso mínimo y su relación con los problemas de asignación y flujo máximo. Cuplajes de cardinalidad máxima en grafos bipartitos. Algoritmos de Edmonds. Aplicación al problema del cartero chino.

   Referencias: [PS82, Cap. 10§ 1–3, Cap. 11§ 1–2]

5. Teoría Poliedral y Métodos de Planos Cortantes
   Desigualdades válidas, facetas y puntos extremos de poliedros. Envoltura convexa e integralidad de politopos, relación con unimodularidad (Teorema de Hoffman-Kruskal). Ejemplo: caracterización del polítopo del cuplaje perfecto (Teorema de Birkhoff). Planos cortantes: cortes de Gomory-Chvatal generales y planos cortantes para ejemplos específicos (*e.g.* cut-set-inequalities, flow-cover inequalities, etc).

Problema de separación. Algoritmos de planos cortantes y métodos de ramificación y cortes (branch-and-cut). Convergencia finita del método fraccional-dual de Gomory.

Referencias: [CCPS98, Cap. 6], [PS82, Cap. 14], [Lee04, Cap. 6 y 7].

6. Algoritmos de Aproximación para problemas NP-duros
   Complejidad de un problema, algoritmos polinomiales, y verificación en tiempo polinomial. Problemas de decisión versus problemas de optimización. Definición de NP-completitud y de problemas NP-duros. Definición de algoritmos de aproximación, esquemas de aproximación polinomial, y esquemas de aproximación totalmente polinomiales. Ilustración (SET-COVER, EUCLIDEAN-TSP).

   Algoritmo glotón de aproximación (ilustrar con VERTEX-COVER), método de las esperanzas condicionales (ilustrar con MAX-CUT y MAX-SAT), método primal dual (ilustrar con el cuplaje perfecto de costo mínimo).

   Referencia: [CLR90, Cap. 37], [PS82, Cap. 17], [Go1-91, Cap. 18], [GW97], [KE06, Cap. 11], [KV10, Cap. 15 y 16].

7. Tópicos

   - Elementos Básicos Sobre Matroides
     Conjuntos independientes de peso máximo. El algoritmo glotón para matroides. Matroides como generalización de problemas en redes y árboles generadores.
     Referencia: [Lee04], [GLS93, Cap. 7, § 5], [KV10, Cap. 13].
   - Programación Entera en Dimensión Fija
     Látices, el problema del vector más corto, base reducida de Lovász, el algoritmo de reducción de bases de Lenstra–Lenstra–Lovász. Programación entera con una cantidad fija de variables.
     Referencia: [Go1-91, Cap. 21–24].
   - Método de Relajación y Descomposición
     Relajación lineal v/s relajación Lagrangeana para programación lineal entera. Métodos de ascenso dual. Métodos de generación de columnas y relación con métodos de planos cortantes. Métodos de descomposición de Dantzig-Wolfe y de Benders.
     Referencias: [NW88, Cap. 2§ 3].
   - Optimización en línea
     Factor competitivo y definición de algoritmo en línea. Ejemplos.
     Referencias: [Go2-94], [BY98]

Referencias

[BY98] A. Borodin, R. El-Yaniv, "Online Computation and Competitive Analysis", Cambridge Press, 1998.

[CCPS98] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, y A. Schrijver, "Combinatorial Optimization", John Wiley & Sons, Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1998.

[CLR90] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, y R.L. Rivest, "Introduction to Algorithms", MIT Press, 1990.

[GLS93] M. Grötschel, L. Lovász, y A. Schrijver, "Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization", Series in Algorithms and Combinatorics, No. 2, Springer–Verlag, second edition, 1993.

[GW97] M. Goemans, y D. Williamson, "The Primal Dual Method for Approximation Algorithms and its Applications to Network Design Problems", Cap. 4, en *Approximation Algorithms for NP–hard problems*, por D.S Hochbaum (editora), PWS Publishing Company, 1997.

[Go1-91] M. Goemans, apuntes del curso *Advanced Algorithms*, MIT, 1991.

[Go2-94] M. Goemans, "On–Line Algorithms", apuntes del curso *Advanced Algorithms*, MIT, Septiembre 1994.

[KE06] J. Kleinberg y É. Tardos, "Algorithm Design", Addison–Wesley, 2006.

[KV10] B. Korte, y J. Vygen, "Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms", Series in Algorithms and Combinatorics, Volume 21. Cuarta edición, Springer, 2010.

[Lee04] J. Lee, "A First Course in Combinatorial Optimization", Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 2004.

[NW88] G.L. Nemhauser y L.A. Wolsey, "Integer and Combinatorial Optimization", Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, 1988.

[PS82] C.H. Papadimitriou y K. Steiglitz, "Combinatorial Optimization, Algorithms and Complexity", Prentice–Hall, 1982.

[Sch03] A. Schrijver, "Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency" Springer–Verlag, Series in Algorithms and Combinatorics, Vol. 24, 2003.

[Sak84] M. Sakarovitch, "Optimisation Combinatoire, Méthodes mathématique et algorithmiques. Programmation Discrète", Hermann, 1984.