Ma47a Optimización Combinatorial	6 de Mayo, 2006

Pauta Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: G. Sanchez*

PROBLEMA 1:

(i).- Sea C una cara minimal de P y $v \in C$. Si v no es una cara de C, entonces existen v' y v'' en $C \setminus \{v\}$ tales que $v = (v' + v'')/2$. Sea L la única recta que pasa por v' y v''. Dado que P está contenido en $\{x : x \geq 0\}$, la recta L no puede estar totalmente contenida en P (y por ende, tampoco en C). Debe cumplirse que existe un punto p en la frontera de P y sobre la recta L, tal que el segmento de recta que va de v a p esta contenido en C. Esta situación puede darse sólo si por p pasa una faceta $F \neq C$ que no contiene a $L \cap C$. Sigue que $F \cap C \neq \emptyset$ es una cara de P estrictamente contenida en C, contradiciendo la minimalidad de C. Hemos concluido que v necesariamente es una cara de P. Por minimalidad de C se tiene que $C = \{v\}$, luego P es puntiagudo.

(ii.1).- Basta notar que P queda definido por las desiguladades

$$\begin{aligned} x_2 &\geq 1\,, \\ x_2 - 2x_1 &\leq 0\,, \\ x_2 + 2x_1 &\leq 6\,. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que P puede expresarse en forma matricial por $\{x : Ax \leq b\}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(ii.2).- Para que $y^T = (y_1, y_2, y_3)$ sea tal que $y^T A$ es integral se debe cumplir que; (1) $y_2 - y_3 \in (1/2)\mathbb{Z}$, y (2) $y_1 - y_2 - y_3 \in \mathbb{Z}$. Pero como además $0 \leq y < 1$ sigue que $y_1 - y_2 - y_3 \in \{0, -1\}$ e $y_2 - y_3 \in \{1/2, 0, -1/2\}$. Luego, los valores factibles para y^T son aquellos vectores de los siguientes conjuntos que están en $\{z \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z < 1\}$;

$$\begin{gathered} \langle (2,1,1) \rangle\,, \\ \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right) + \langle (2,1,1) \rangle\,, \\ \left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right) + \langle (2,1,1) \rangle\,, \\ \left(0, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}\right) + \langle (2,1,1) \rangle\,, \\ \left(0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\right) + \langle (2,1,1) \rangle\,, \\ \left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) + \langle (2,1,1) \rangle\,. \end{gathered}$$

(ii.3).- Cada uno de los posibles valores de y de la parte anterior genera una desigualdad de la forma $(y^T A)x \leq \lfloor y^T b \rfloor$. Sustituyendo por los valores encontrados en (ii.2) se obtienen las siguientes desigualdades no implicadas por el sistema $Ax \leq b$:

$$\begin{aligned} -x_1 &\leq -1\,, \\ x_1 &\leq 2\,, \\ -x_1 + x_2 &\leq 1\,, \\ x_1 + x_2 &\leq 4\,. \end{aligned}$$

El poliedro P' queda definido por las anteriores desigualdades más las desigualdades del sistema $Ax \leq b$ y se ilustra en la Figura 1

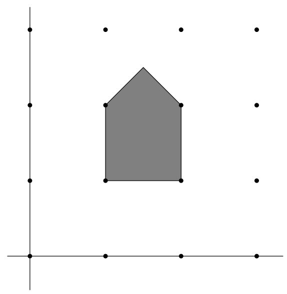

Figura 1: Poliedro P'.

Problema 2:

(i).- Primero, notar que toda solución factible $\vec{x}$ de (L) está asociado uno a uno con un conjunto de intervalos $\mathcal{I}$ que no se traslapan (donde $[t_i, u_i) \in \mathcal{I}$ si y sólo si $x_i = 1$). Como además el beneficio de elegir los intervalos en $\mathcal{I}$ es exactamente igual a $\sum_i p_i x_i$, sigue que la resolución de (L) entrega una solución óptima del problema planteado.

Para ver que la relajación de (L) puede tener soluciones óptimas fraccionarias, considerar la instancia que consta de tres intervalos idénticos. El conjunto de soluciones factibles de (L) queda dado por el poliedro $P = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}_3^+ \,:\, x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_3 \leq 1, x_2 + x_3 \leq 1\right\}$. Es fácil ver que los vértices de P son

$$(0,0,0)\,, \qquad (1,0,0)\,, \qquad (0,1,0)\,, \qquad (0,0,1)\,, \qquad (1/2,1/2,1/2)\,.$$

Luego, P no es integral.

(ii).- Observar que toda solución factible $\vec{x}$ de (L') está asociado uno a uno con un conjunto de intervalos $\mathcal{I}$ que no se traslapan (donde $[t_i, u_i) \in \mathcal{I}$ si y sólo si $x_i = 1$). Al igual que en (i), el beneficio de elegir los intervalos en $\mathcal{I}$ es exactamente igual a $\sum_i p_i x_i$, sigue que la resolución de (L') entrega una solución óptima del problema planteado.

Como la noción de total unimodularidad es independiente del orden de las filas de la matriz A, y siguiendo la indicación, podemos reordenar a nuestro gusto las filas de A. Luego, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$. Por otro lado, una columnas de A está asociada a un intervalo $[t_j, u_j)$. Suponiendo entonces que las filas están ordenadas de acuerdo al valor de t_i

del intervalo al que están asociadas, sigue que la columna $A_{\star,j} = (A_{i,j})_i$ está dada por

$$A_{i,j} = \begin{cases} 0\,, & \text{si } t_i < t_j\,, \\ 1\,, & \text{si } t_j \leq t_i < u_j\,, \\ 0\,, & \text{si } u_j \leq t_i\,, \end{cases}$$

Se observa entonces que los 1's en cada columna de la matriz $A \in \{0,1\}^{n\times n}$ son consecutivos. Por resultado visto en cátedra se concluye que A es totalmente unimodular.

Problema 3:

(i).- Sumando las desigualdades $x_u + x_v \leq 1$ sobre todos los arcos uv de un circuito C, sigue que

$$|C| \geq \sum_{uv\in C} (x_u + x_v) = 2x(C)\,.$$

Si dividimos por 2, tomamos cajones inferiores y consideramos el caso de $|C|$ impar, sigue que

$$\frac{1}{2}(|C|-1) = \left\lceil \frac{1}{2}|C| \right\rceil \geq x(C)\,.$$

(ii).- Observar que de la parte (i) se tiene que para cada uno de los "triángulos" urv de la 5-rueda, la siguiente desigualdad es válida:

$$x_u + x_r + x_v \leq 1\,.$$

Sumando la anterior desigualdad dos veces por cada "triángulo" se obtiene que

$$10x_r + 4x(W \setminus \{r\}) \leq 10\,.$$

Pero también de la parte (i) sabemos que $x(W \setminus \{r\}) \leq 2$, que sumado a la desigualdad previamente obtenida arroja que

$$10x_r + 5x(W \setminus \{r\}) \leq 12\,.$$

Dividiendo por 5 y tomando cajones inferiores, se obtiene la desigualdad deseada.

(iii).- Por inducción en el tamaño del clique. La desigualdad es claramente cierta si $|K| = 2$. Supongamos entonces que $n = |K| \geq 3$. Por hipótesis de inducción, $x(K \setminus \{v\}) \leq 1$ para todo $v \in K$. Sumando todas estas desigualdades, sigue que

$$(n-1)\cdot x(K) = \sum_{v\in K} x(K \setminus \{v\}) \leq n\,.$$

Dividiendo por $(n-1)$ y tomando cajones inferiores, se obtiene la desigualdad deseada.