MA-47A Optimización Combinatorial	**21 de Junio, 2003**

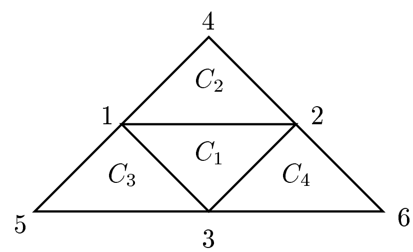
Pauta Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: G. Espinoza*

(i).- Enumerando los cliques maximales de H como en el dibujo de más abajo, se obtiene la siguiente matriz clique de H,

$$K = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} \end{array}$$

Veamos ahora que $P(H)$ es un poliedro integral. Para ello verifiquemos que K es unimodular. Por



definición, ello implica comprobar que toda base B de K es tal que $\mathrm{Det}(B) \in \{-1, 0, +1\}$. Para ello, notar que K es rango–fila completa, luego toda base B de K es una matriz de 4×4. Necesariamente entonces, incluye al menos una de las 3 últimas columnas de K. Expandiendo el determerminante en torno a estás últimas columnas sigue que $\mathrm{Det}(B) = \mathrm{Det}(B')$, donde B' es una submatriz de K de $k \times k$, $k \leq 2$, o una de las siguientes tres matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es un ejercicio simple comprobar que los determinantes de estas 3 matrices son -1, 1 y 1 respectivamente. Claramente una submatriz de 1×1 de K tiene determinante 0 o 1. Una submatriz de K, digamos $B' = (b'_{ij})_{ij}$, de 2×2, es una matriz cuyos coeficientes son 0's y 1's, i.e., $\mathrm{Det}(B') = b'_{11}b'_{22} - b'_{12}b'_{21}$, luego $\mathrm{Det}(B') \in \mathbb{Z}$ y $-1 \leq \mathrm{Det}(B') \leq +1$. Por lo tanto $\mathrm{Det}(B') \in \{-1, 0, +1\}$. Esto finaliza la verificación de la unimodularidad de K.

Sea ahora v vértice de $P(H)$. Luego, v debe satisfacer con igualdad 6 de las 10 desigualdades $Kv \leq \vec{1}$ y $x \geq 0$. Por lo tanto, v posee al menos 2 coordenadas nulas. Sea B la matriz formada por las columnas de K correspondientes a coordenadas no nulas de v (en caso de que haya menos de 4 tales coordenadas, agregamos columnas de K a B hasta completar una base). Sigue que las coordenadas no nulas de v aparecen como coordenadas del vector $B^{-1}v$. Este último vector es integral, pues $\mathrm{Det}(B) = \pm 1$. Sigue que v debe ser integral.

Por otro lado, $P(H)$ esta claramente contenido en $[0, 1]^n$, luego es acotado. Tenemos entonces que $P(H)$ es un polítopo integral.

Como $P(H)$ es integral y está contenido en $[0,1]^n$, sus vértices son vectores indicatrices de subconjuntos de nodos de H. Sea S el conjunto asociado a un vértice x_S de $P(H)$. Supongamos que $u, v \in S$ son tales que $uv \in E(H)$. Sea C un clique maximal que contiene a u y v. Observar que $K_{C,*}x_S \geq 2$, contradiciendo que x_S es un vértice de $P(H)$, i.e., S debe ser un conjunto independiente de H. Sigue que cada vértice de $P(H)$ esta asociado al vector indicatriz de uno de los siguientes subconjuntos de nodos de H,

$$\emptyset, \{1\}, \ldots, \{6\}, \{1,6\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{4,5,6\}\,.$$

(No hay más conjuntos independientes. Quizás la forma más fácil de convencerse de lo anterior es observando que un conjunto independiente puede tener a lo más un elemento en cada uno de los cliques C_2, C_3 y C_4.) Como todos los vértices de $P(H)$ son integrales, sigue que $P(H)$ es integral.

(ii).- Si G es bipartido, sus cliques maximales son los extremos de los arcos de G. Luego, la matriz clique de G es

$$K_{uv,w} = \begin{cases} 1\,, & w \in \{u,v\}\,, \\ 0\,, & w \notin \{u,v\}\,. \end{cases}$$

En otras palabras, K es una matriz de incidencia nodo–arco, que como se vio en cátedra son matrices de redes, i.e., totalmente unimodulares. El Teorema de Hoffman–Kruskal implica entonces que

$$P(G) = \{x \,:\, Kx \leq \vec{1}; x \geq 0\}\,,$$

es un poliedro integral.

(iii).- Veamos primero que el converso de (iii.3) se cumple. En efecto, sea $z \in P^*$. Como $conv\{0, x_1, \ldots, x_m\} \subseteq P$, sigue que $z^T x_i \leq 1$, $i = 1, \ldots, m$. Como $cono\{y_1, \ldots, y_t\} \subseteq P$, sigue que para todo $\lambda \geq 0$, $z^T(\lambda y_j) \leq 1$, i.e., $z^T y_j \leq 0$, $i = 1, \ldots, t$. Luego,

$$P^* \subseteq \{z \in \mathbb{R}^n \,:\, z^T x_i \leq 1, i = 1, \ldots, m; z^T y_j \leq 0, j = 1, \ldots, t\}$$

Para establecer la otra inclusión consideremos $z \in P^*$, i.e., $z^T x \leq 1$ para todo $x \in P$. Como $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_t \in P$, sigue que $z \in \{z \in \mathbb{R}^n \,:\, z^T x_i \leq 1, i = 1, \ldots, m; z^T y_j \leq 0, j = 1, \ldots, t\}$.

El converso de (iii.3) recién demostrado implica que P^* es un poliedro, i.e., se cumple (iii.1).

Veamos entonces que se tiene (ii). Claramente,

$$(P^*)^* = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, z \in P^* \Longrightarrow y^T z \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, z^T x \leq 1, \forall x \in P \Longrightarrow y^T z \leq 1\} \supseteq P\,.$$

Para probar el converso supongamos que $y \in (P^*)^* \setminus P$. Luego, existe una desigualdad $a^T x \leq b$ que se satisface para todo $x \in P$, pero tal que $a^T y > b$. Como el origen esta en P se tiene que $b \geq 0$. Si $b > 0$, entonces $(b^{-1}a)^T y > 1$ y $b^{-1}a \in P^*$. Contradiciendo así que $y \in (P^*)^*$. Si $b = 0$, entonces $(\lambda a)^T \in P^*$ para todo $\lambda \geq 0$. Pero $a^T y > 0$, luego $(\lambda a)^T y > 1$ para $\lambda > 0$ suficientemente grande. Contradiciendo nuevamente que $y \in (P^*)^*$.

Resta demostrar la implicancia faltante en (iii.3). Sea $Q = conv\{0, , x_1, \ldots, x_m\} + cono\{y_1, \ldots, y_t\}$. Por la implicancia que ya se estableció, $Q^* = P^*$. Luego, por (iii.2), $Q = (Q^*)^* = (P^*)^* = P$.

(iv.1).- Bastará verificar que cada coordenada de $x \in P$ puede acotarse por arriba por un valor λ independiente de x. En efecto, sea e_i el i–ésimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Como A es no–negativa y $x \geq 0$, $A(x_i e_i) \leq Ax \leq \vec{1}$, i.e., $x_i A_{*,i} \leq \vec{1}$. Luego, $x_i ||A_{*,i}||_\infty \leq 1$, y como A no posee columnas nulas, sigue que $x_i \leq 1/||A_{*,i}||_\infty$.

(iv.2).- Sea $\pi \geq 0$ tal que $M(P)\pi \leq \vec{1}$ y $x \in P$. Como todo polítopo es combinación convexa de sus vértices, existe $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, m el número de vértices de P, tal que $\lambda^T\vec{1} = 1$ y $\lambda^T M(P) = x^T$. Sigue que, $x^T\pi \leq 1$. Como x es cualquiera, $\pi \in P^C$.

Sea ahora $\pi \in P^C$, i.e., $\pi \geq 0$ y $\pi^T x \leq 1$ cualquiera sea $x \in P$. Si $M_{i,*}$ es una fila de $M(P)$, entonces $M^T_{i,*}$ es un vértice de P. En particular, $M^T_{i,*} \in P$. Luego, $M_{i,*}\pi \leq 1$. Como $M_{i,*}$ es una fila cualquiera de $M(P)$, sigue que $M(P)\pi \leq 1$, i.e., $\pi \in \{\pi \in \mathbb{R}^n \,:\, M(P)\pi \leq 1, \pi \geq 0\}$.

(iv.3).- Si $x \in P$, entonces $\pi^T x \leq 1$ para todo $\pi \in P^C$. Luego, como $x \geq 0$, sigue que $x \in (P^C)^C$.

Observar ahora que $A^T_{i,*} \in P^C$. Luego, si $x \in (P^C)^C$, tenemos que $A_{i,*}x \leq 1$. Como la desigualdad es válida cualquiera sea el i, concluimos que $Ax \leq \vec{1}$. Finalmente, notar que $x \in (P^C)^C$ implica además que $x \geq 0$. O sea, $x \in P$ y por lo tanto $(P^C)^C = P$.

(v).- Si G es perfecto y $K(G)$ es una matriz clique de G, por definición $P(G) = \{x \in \mathbb{R}^{|V(G)|} \,:\, K(G)x \leq \vec{1}; x \geq 0\}$ es un polítopo integral. Como hay una correspondencia uno a uno entre cliques maximales de G y conjuntos independientes maximales de $\overline{G}$, sigue que $M(P(G)) = K(\overline{G})$. Luego, por (iv.2),

$$P(\overline{G}) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, K(\overline{G})x \leq \vec{1}; x \geq 0\} = (P(G))^C \,.$$

Sigue, por (iv.3) que

$$\begin{aligned}(P(\overline{G}))^C &= P(G) = \{\pi \in \mathbb{R}^n \,:\, K(G)\pi \leq \vec{1}; \pi \geq 0\} \\ &= \{\pi \in \mathbb{R}^n \,:\, \pi^T x \leq 1, \forall x \in conv\{0, K_{1,*}(G), \ldots, K_{m,*}(G)\}, \pi \geq 0\} \,,\end{aligned}$$

donde m denota el número de filas de $K(G)$. Por definición de polítopo antibloqueador, obtenemos que

$$P(\overline{G}) = conv\{0, K_{1,*}(G), \ldots, K_{m,*}(G)\} \,.$$

Luego, los vértices de $P(\overline{G})$ son filas de $K(G)$, en particular, son integrales.

El converso sigue directamente del hecho que $\overline{(\overline{G})} = G$.

(vi).- Sea $\Pi : \mathbb{R}^{|V(G')|} \to \mathbb{R}^{|V(G)|}$ tal que $\Pi(x_j : j \in V') = (x_j : j \in V)$, done $x_j = 0$ si $j \notin V'$. Observar que

$$\Pi\left(P(G')\right) = P(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^{|V(G)|} \,:\, x_j = 0, \forall j \in V \setminus V'\} \,.$$

Luego, $\Pi(P(G'))$ es una cara de $P(G)$. Sigue que v es un vértice de $P(G')$ si y sólo si $\Pi(v)$ es un vértice de la cara $P(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^{|V(G)|} \,:\, x_j = 0, \forall j \in V \setminus V'\}$ de $P(G)$. Luego, como $P(G)$ es integral, se tiene que $P(G')$ es integral. En otras palabras, G' es perfecto.