MA-47A Optimización Combinatorial **21 de Junio, 2003**

Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: G. Espinoza*

TIEMPO: 4.0 HRS.

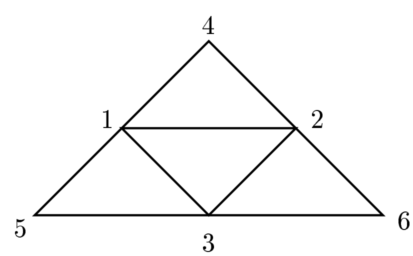
En lo que sigue, sea $G = (V, E)$ un grafo. Decimos que $S \subseteq V$ es un conjunto independiente en G si para todo $u, v \in S$ se tiene que $uv \notin E$. Decimos que $C \subseteq V$ es un clique en G si para todo $u, v \in C$, se tiene que $uv \in E$. Observe que C es un clique en G si y sólo si C es un conjunto independiente en $\overline{G}$. (Recuerde que $\overline{G} = (V, \overline{E})$, donde $e \in \overline{E}$ si y sólo si $e \notin E$.)

Una matriz clique $K = (K_{C,v})_{C,v}$ del grafo G es una matriz cuyas filas corresponden a los cliques maximales de K y cuyas columnas corresponden a los nodos de G, tal que

$$K_{C,v} = \begin{cases} 1\,, & v \in C\,, \\ 0\,, & v \notin C\,. \end{cases}$$

El polítopo independiente fraccional de G se define por $P(G) = \{x \in \mathbb{R}^{|V|} \,:\, Kx \leq \vec{1}\,; x \geq 0\}$.

(i).- Determine la matriz clique del grafo H del dibujo de más abajo. Pruebe que $P(H)$ es un polítopo integral y determine *todos* sus vértices.



Se dice que G es un grafo perfecto si $P(G)$ es integral.

(ii).- Pruebe que si G es bipartido, entonces es perfecto.

Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos el *polar* X^* de X por $X^* = \{z \in \mathbb{R}^n \,:\, z^T x \leq 1\,, \forall x \in X\}$.

(iii).- Pruebe que si $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un poliedro que contiene el origen, entonces:

(iii.1).- P^* es un poliedro.

(iii.2).- $(P^*)^* = P$.

(iii.3).- $P^* = \{z \in \mathbb{R}^n \,:\, z^T x_i \leq 1, i = 1, \ldots, m; z^T y_j \leq 0, j = 1, \ldots, t\}$ si y sólo si $P = conv\{0, x_1, \ldots, x_m\} + cono\{y_1, \ldots, y_t\}$.

Indicación: Pruebe primero el converso de (iii.3), y deje la otra implicancia para el final.

Se define el antibloqueador P^C de un polítopo P por $P^C = \{\pi \in \mathbb{R}^n \,:\, \pi^T x \leq 1, \forall x \in P; \pi \geq 0\}$.

Para un polítopo P denotaremos por $M(P)$ la matriz cuyas filas son los vértices de P.

(iv).- Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax \leq 1, x \geq 0\}$ donde A es una matriz de coordenadas no negativas sin columnas nulas.

(iv.1).- Verifique que P es un polítopo.
(iv.2).- Pruebe que $P^C = \{\pi \in \mathbb{R}^n \,:\, M(P)\pi \leq 1, \pi \geq 0\}$.
(iv.3).- Pruebe que $(P^C)^C = P$.

(v).- Pruebe que G es perfecto si y sólo si $\overline{G}$ es perfecto.

(vi).- Sea $V' \subseteq V$. Pruebe que si G es un grafo perfecto, entonces $G' = G|_{V'}$ también es un grafo perfecto.