MA-47A Optimización Combinatorial **17 de Mayo, 2003**

Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: G. Espinoza*

TIEMPO: 4.5 HRS.

PARTE I.

(i).- (1.0 pts) Sea G un grafo bipartido.

(i.1).- Muestre que el problema consistente en encontrar un k–cuplaje de peso mínimo en G puede reducirse al problema del cuplaje perfecto de peso mínimo (en grafos bipartidos).

(i.2).- Muestre que el problema del cuplaje perfecto de peso mínimo en G reduce al problema de la circulación de costo mínimo.

Explicite el tiempo que toman las reducciones propuestas.

(ii).- (0.5 pts) Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ digrafos con función de costos c y c' en sus respectivos conjuntos de arcos, donde u y u' denotan las funciones de capacidad superior de G y G' respectivamente. Sea además l una función de capacidad inferior de G. Pruebe que si se tiene la situación ilustrada a la izquierda de la Figura 1 sí y sólo si se tiene la situación descrita a la derecha de la misma Figura 1, entonces

$$x \text{ es circulación óptima en } G \iff x' \text{ es circulación óptima en } G'.$$

<u>Nota</u>: Observe que $vw \in E'$ sí y sólo si $wv \in E'$ y que c' y x' son funciones antisimétricas, i.e., para todo $vw \in E'$ se tiene que $c'(vw) = -c'(wv)$ y $x'(vw) = -x'(wv)$.

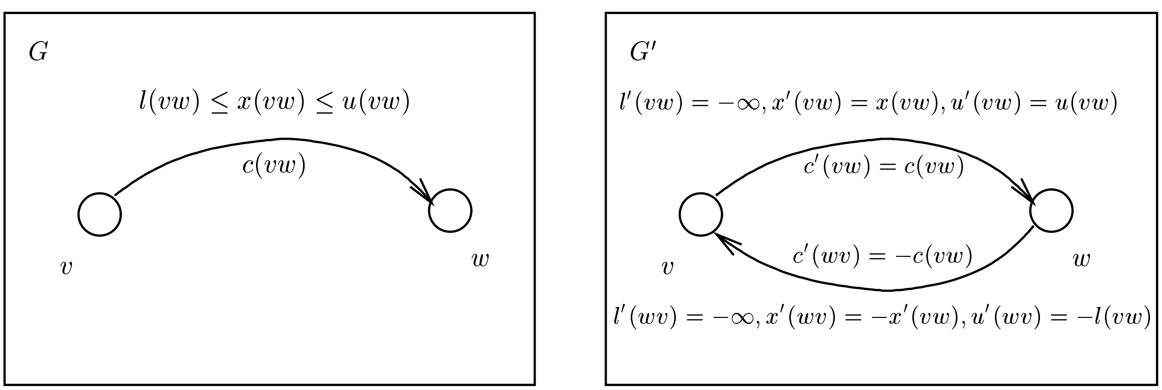

Figura 1: Relación entre circulaciones en G y G'.

PARTE II.

En lo que sigue, sea $G = (V, E)$ un digrafo tal que $vw \in E$ sí y sólo si $wv \in E$. Sea $c : E \to \mathbb{Z}$ una función antisimétrica (integral) de costo y $u : E \to \mathbb{Z}$ una función (integral) de capacidad máxima de los arcos de G (asuma en lo que sigue que la capacidad mínima de todo arco de G es $-\infty$). Definimos además,

$$C = \max\{|c(e)| \,:\, e \in E\}\,, \qquad \text{y} \qquad U = \max\{|u(e)| \,:\, e \in E\}\,.$$

La *capacidad residual* de e con respecto a la circulación x en G se define como $u_x(e) = u(e) - x(e)$. El *grafo residual* de G con respecto a la circulación x es $G_x = (V, E_x)$, donde $e \in E_x$ sí y sólo si $u_x(e) > 0$. A un potencial $d : V \to \mathbb{R}$ le asociamos una función de $c_d : E \to \mathbb{R}$ de *costos reducidos* dada por

$$c_d(e) = c(e) + d(t(e)) - d(h(e))\,.$$

(iii).- (0.5 pts) Pruebe que c_d es una función de costos antisimétrica y que si x es circulación (no necesariamente antisimétrica) y Γ un dicircuito en G,

$$\sum_{e\in E} c(e)x(e) = \sum_{e\in E} c_d(e)x(e)\,, \qquad \text{y} \qquad c(\Gamma) = c_d(\Gamma)\,.$$

(iv).- (2.5 pts) Sea x circulación factible en G. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a.- La circulación antisimétrica x es de costo mínimo en G,

b.- No hay dicircuitos de costo negativo en G_x,

c.- Existe un potencial $d : V \to \mathbb{R}$ tal que $c_d(e) \geq 0$, para todo $e \in E(G_x)$,

d.- Existe un potencial $d : V \to \mathbb{R}$ tal que $c_d(e) > -1/|V|$, para todo $e \in E(G_x)$.

Pruebe 3 de las 4 siguientes implicaciones; $a \Longrightarrow b$, $b \Longrightarrow c$, $c \Longrightarrow d$, $d \Longrightarrow a$.

<u>Nota 1</u>: Recuerde que el largo de un (u,w)–dicamino es a lo más la suma de los largos de un (u,v)–dicamino y un (v,w)–dicamino.

<u>Nota 2</u>: Observe que si x y x^* son circulaciones factibles en G, entonces $x^* - x$ es circulación factible en G_x con función de capacidad superior u_x.

(v).- (1.0 pts) Considere el algoritmo de Klein descrito en la Figura 2 y pruebe el siguiente

Teorema 1 *Si c y u son integrales, el algoritmo de Klein partiendo de una circulación antisimétrica factible e integral, termina en $O(|E|\cdot C\cdot U)$ iteraciones. Más aun, la circulación resultante es óptima.*

(vi).- (0.5 pts) Sean Γ y x' el dicircuito elegido en el paso 2 y la circulación definida en el paso 4 del algoritmo de Klein, respectivamente. Concluya que si existen potenciales $d, d' : V \to \mathbb{R}$ tales que

$$\sup_{d'\in\mathbb{R}^E} \min\{c_{d'}(e) \,:\, e \in E(G_{x'})\} \geq \left(1 - \frac{1}{|V|}\right) \sup_{d\in\mathbb{R}^E} \min\{c_d(e) \,:\, e \in E(G_x)\}\,,$$

entonces el algoritmo encuentra una circulación óptima al cabo de a lo más $|V|\cdot\ln(|V|\cdot C)$ iteraciones.[1]

[1] Recuerde que $1 - x < e^{-x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

ENTRADA: Digrafo $G = (V, E)$, x circulación antisimétrica e integral factible en G, y c y u como en el enunciado.

CÓDIGO:

1. **Sea** x una circulación factible en G,
2. **Mientras** G_x posea un dicircuito Γ tal que $c(\Gamma) < 0$.
3. $\quad$ $\delta(x) \leftarrow \min\{u_x(e) \,:\, e \in \Gamma\}$
4. $\quad$ **Para todo** $vw \in E$,

$$x(vw) \leftarrow \begin{cases} x(vw) + \delta(x)\,, & \text{si } vw \in \Gamma\,, \\ x(vw) - \delta(x)\,, & \text{si } wv \in \Gamma\,, \\ x(vw)\,, & \text{si } vw \notin \Gamma\,. \end{cases}$$

5. **Retornar** x

Figura 2: Algoritmo de Klein.