MA-47A Optimización Combinatorial **26 de Abril, 2003**

Control No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: G. Espinoza*

TIEMPO: 4.5 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (2.0 pts) Sea $G = (V, E)$ un grafo y $c : E \to \mathbb{R}$ una función de peso. Pruebe que si $H = (V, T)$ es un árbol generador de peso mínimo de G, entonces para todo $e = vw \in E \setminus T$ y cualquier f en un (v, w)–camino en H, $c(e) \geq c(f)$.

(ii).- Sea G un grafo. Un camino cerrado de G se dice ciclo Euleriano de G si recorre cada arco de G exactamente una vez (pero un nodo podría ser visitado varias veces). Se dice que G es Euleriano si posee algún ciclo Euleriano.

(ii.1).- (2.0 pts) Pruebe que un grafo conexo G (sin bucles) es Euleriano si y sólo si no posee nodos en los que incidan un número impar de arcos.

(ii.2).- (2.0 pts) De un algoritmo que dado un grafo $G = (V, E)$, encuentra un ciclo Euleriano en G o determina que tal ciclo no existe. Describa una implementación de su algoritmo que tome $O(|V| + |E|)$.

Observe que los 7 puentes de Königsberg en la época de Euler (ver Figura 1) no pueden ser recorridos una única vez de manera de terminar en el mismo lugar del que se partió.

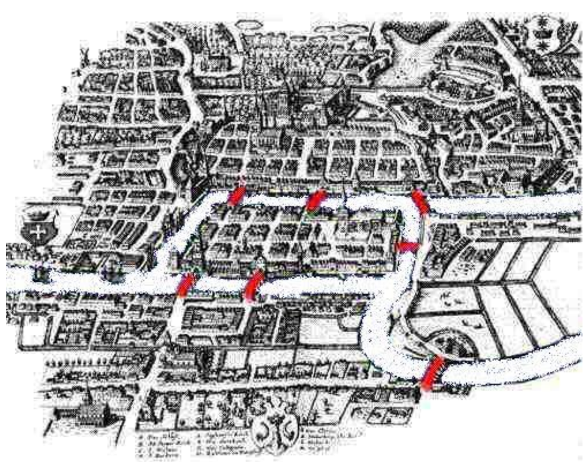

Figura 1: Los puentes de Königsberg en la época de Euler.

PROBLEMA 2: Sea $G = (V, E)$ un digrafo con función de costo en los arcos $c : E \to \mathbb{R}$ sin circuitos de costo negativo. Sean $s, t \in V$ dos nodos fijos y denotemos mediante $\pi^s, \pi^t \in \mathbb{R}^V$ los potenciales de camino mínimo, donde

$$\begin{aligned} \pi^s(v) &= \min\{c(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ es un } (s,v)\text{–dicamino}\}, \\ \pi^t(w) &= \min\{c(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ es un } (w,t)\text{–dicamino}\}. \end{aligned}$$

(i).- (2.0 pts) Proponga un algoritmo eficiente (dentro de los vistos en clase) para calcular π^s y π^t. Indique su complejidad.

(ii).- (2.0 pts) Sea $e = vw \in E$ un arco dado. Probar que un (s,t)–dicamino de costo mínimo que utiliza el arco e tiene costo $\pi^s(v) + c(e) + \pi^t(w)$.

(iii).- (2.0 pts) Utilice lo anterior para construir un algoritmo que calcule el dicamino de costo mínimo de s a t, y el segundo dicamino de costo mínimo de s a t. ¿Cómo se ve afectada la complejidad de su algoritmo de la parte (i)?

PROBLEMA 3:

(i).- (2.0 pts) Rehaga la demostración vista en clase que establece que si x es un flujo factible máximo en una red $G = (V, E)$ con función de capacidad en los arcos $u : E \to \mathbb{R}$, entonces no existen caminos aumentadores en el digrafo auxiliar $G(x)$.

(ii).- (4.0 pts) Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que $M \subseteq E$ es un *cuplaje* de G si no existen $e, f \in M$, $e \neq f$, con algún extremo en común y si ningún $e \in M$ corresponde a un bucle. Se dice que $C \subseteq V$ es un *recubrimiento* de G si cualquier $e \in E$ tiene algún extremo en C.

Pruebe el siguiente

Teorema 1 *(de König) Para todo grafo bipartido G,*

$$\max\{|M| : M \textit{ cuplaje de } G\} = \min\{|C| : C \textit{ recubrimiento de } G\}.$$