MA-47A Optimización Combinatorial **17 de Junio, 2000**

Pauta Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: J. R. Correa*

(i).- Sean G' y G'' las dos copias de G en $\widehat{G}$. Sea M un matching en G. Denotamos por $\widehat{M}$ al matching perfecto en $\widehat{G}$ que consiste en dos copias de M, una en G' y otra en G'' respectivamente, más los arcos de peso nulo entre G' y G'' necesarios para completar un matching perfecto. Sigue que $w(\widehat{M}) = 2w(M)$.

Por otro lado, sea H el matching perfecto de peso máximo en $\widehat{G}$. Observar que H induce matchings H' y H'' en G' y G'', y por lo tanto en G, tales que $w(H) = w(H') + w(H'')$. Sigue que $w(H') \geq w(H'')$ pues de lo contrario $w(\widehat{H''}) = 2w(H'') > w(H') + w(H'') = w(H)$. Análogamente, $w(H') \leq w(H'')$. Luego, $w(H') = w(H'')$. Si M es un matching en G tal que $w(M) > w(H')$, entonces $w(\widehat{M}) > 2w(H') = w(H)$, que contradice la optimalidad de H. Sigue que H' es el matching de peso máximo en G.

En resumen, dado un procedimiento eficiente para encontrar un matching perfecto de peso máximo, para encontrar el matching de peso máximo en G basta construir $\widehat{G}$, encontrar un matching perfecto H de peso máximo en $\widehat{G}$, determinar el matching H' que induce en G', y por ende en G. Dicho H' es un matching de peso máximo en G.

(ii).- Si $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ es indicatriz de un matching perfecto en G, entonces claramente satisface

$$x(\delta(v)) = 1\,, \text{ para todo } v \in V\,, \text{ y } \quad x \geq 0\,. \tag{1}$$

Luego, $PM(G) \subseteq conv\{x \in \{0,1\}^{|E|} : x(\delta(v)) = 1\,, \text{ para todo } v \in V\,, \text{ y } x \geq 0\}$.

Para probar la otra inclusión, consideremos el polítopo

$$P \quad = \quad \{x \in \mathbb{R}^{|E|} : x(\delta(v)) = 1\,, \text{ para todo } v \in V\,, \text{ y } x \geq 0\}\,.$$

Bastará demostrar que P es integral. En efecto si este es el caso y x es un vértice de P, es fácil ver que x es el vector indicatriz de un matching perfecto en G. Luego, todos los vértices de P estarían en $PM(G)$. Como todo polítopo es la envoltura convexa de sus vértices, por convexidad tendríamos el resultado deseado.

Ahora, para ver que P es integral, supongamos que $\widetilde{x}$ es un vértice de P que no es entero. Sea entonces $\widetilde{E} = \{e \in E : 0 < \widetilde{x}_e < 1\} \neq \emptyset$. Como $\widetilde{x}(\delta(v)) = 1$, en todo nodo en el que incide un arco de $\widetilde{E}$ debe incidir al menos otro arco de $\widetilde{E}$. Luego, el grafo $(V, \widetilde{E})$ es un grafo bipartito, porque G lo es, que contiene al menos un ciclo C. Dicho ciclo debe ser de largo par, porque un grafo bipartito sólo contiene ciclos de largo par.

Sea $d \in \mathbb{R}^{|E|}$ nulo sobre $E \setminus C$ y 1 y -1 alternadamente en C. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $\widetilde{x} + \epsilon d$ y $\widetilde{x} - \epsilon d$ están en P, pero $\widetilde{x} = (\widetilde{x} - \epsilon d)/2 + (\widetilde{x} + \epsilon d)/2$. Esto contradice el hecho que $\widetilde{x}$ es vértice.

(iii).- Si $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ es indicatriz de un matching en G, entonces claramente satisface

$$x(\delta(v)) \leq 1\,, \text{ para todo } v \in V\,, \text{ y } \quad x \geq 0\,. \tag{2}$$

Luego, $M(G) \subseteq conv\{x \in \{0,1\}^{|E|} \,:\, x(\delta(v)) \leq 1\,,\ \text{para todo } v \in V\,,\ \text{y } x \geq 0\}$.

Para probar la otra inclusión, consideremos el polítopo

$$P \quad = \quad \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \,:\, x(\delta(v)) \leq 1\,,\ \text{para todo } v \in V\,,\ \text{y } x \geq 0\}\,.$$

Bastará demostrar que P es integral. En efecto si este es el caso y x es un vértice de P, es fácil ver que x es el vector indicatriz de un matching en G. Luego, todos los vértices de P estarían en $M(G)$. Como todo polítopo es la envoltura convexa de sus vértices, por convexidad tendríamos el resultado deseado.

Nos falta probar que P es integral. Primero observemos que si G es bipartito, entonces V lo podemos expresar como $L \cup R$ donde los arcos en E van de nodos en L a nodos en R o viceversa. Sea $\widehat{G}$ como en (i). Denotamos las dos copias de G en $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E})$ por G' y G'' y sus correspondientes particiones de nodos por L' y R' y L'' y R'' respectivamente. Tenemos que los nodos de $\widehat{G}$ se pueden particionar en dos conjuntos $L' \cup R''$ y $L'' \cup R'$ de forma que los arcos en $E(\widehat{G})$ vayan de $L' \cup R''$ a $L'' \cup R'$ o viceversa. Sigue que $\widehat{G}$ es bipartito.

Ahora, para ver que P es integral, supongamos que $\widetilde{x}$ es un vértice de P que no es entero. Definamos $\widetilde{z} \in \mathbb{R}^{|\widehat{E}|}$ de forma que $\widetilde{z}_e$ coincide con $\widetilde{x}$ en $E(G')$ y $E(G'')$, y si $e = (v', v'')$ o $e = (v'', v')$ es un arco con extremos en G' y G'', observamos que tanto v' como v'' corresponden a copias de un nodo $v \in V$, asignándole $\widetilde{z}_e = 1 - \widetilde{x}(\delta(v))$ obtenemos que $\widetilde{z} \geq 0$ y $\widetilde{z}(\delta(\widehat{v})) = 1$, para todo $\widehat{v} \in \widehat{V}$.

Como $\widetilde{x}$ no es entero, $\widetilde{z}$ tampoco. Luego, por (i), $\widetilde{z}$ no es vértice, por lo tanto es combinación lineal convexa de elementos distintos en $\widetilde{z}$ en

$$\{z \in \mathbb{R}^{|\widehat{E}|} \,:\, z(\delta(\widehat{v})) = 1\,,\ \text{para todo } \widehat{v} \in V(\widehat{G})\,,\ \text{y } z \geq 0\}\,.$$

Sigue que las coordenadas en G' o las coordenadas en G'' de $\widetilde{z}$, i.e., $\widetilde{x}$, son combinaciones lineales convexas de elementos en P distintos a $\widetilde{x}$. Esto contradice el hecho que $\widetilde{x}$ es vértice.

(iv).- Si y^* es entero, entonces estamos listos. En caso contrario, existe $v \in V$ tal que y^*_v no es entero, en particular $v \notin W(y^*)$. Denotemos por G^* el grafo inducido por $J(y^*)$. Si u es vecino de v en G^*, entonces $y^*_u + y^*_v = w_{u,v} \in \mathbb{Z}$. Luego, y^*_u no puede ser entero. Lo mismo se tiene para los vecinos de u, etc. Por lo tanto, si t pertenece a la misma componente conexa de v en G^*, entonces y^*_t tampoco es entero.

Como G es bipartito existe una partición $\{L, R\}$ de sus nodos de forma que los arcos de G vayan de L a R o viceversa. Sigue que lo mismo se cumple para el grafo G^*. Sea C^*_L (respectivamente C^*_R) el conjunto de nodos en la componente conexa de G^* a la que v pertenece que se encuentran en L (respectivamente en R). Supongamos sin pérdida de generalidad que $|C^*_L| \geq |C^*_R|$. Sean entonces

$$\epsilon_L \quad = \quad \min\{\min\{y_v \,:\, v \in C^*_L\}, \min\{w_{u,v} - y_v \,:\, (u,v) \notin J(y^*), v \in C^*_L\}\}\ .$$

Observar que $\epsilon_L > 0$. Decreciendo en ϵ_L el valor de y^*_v para todo v en C^*_L y aumentando y^*_v para todo v en C^*_R en la misma cantidad obtenemos una nueva solución $\widetilde{y}$ factible cuyo costo no es mayor que el de y^* y para la cual $W(\widetilde{y}) \cup J(\widetilde{y})$ esta estrictamente contenida en $W(y^*) \cup J(y^*)$, lo que contradice la maximalidad de $W(y^*) \cup J(y^*)$.

(v).- Sea $G = (V, E)$ grafo no–dirigido bipartito y $w \in \mathbb{R}^{|E|}$ un vector cuyas coordenadas son todas iguales a 1.

Sea x^* el óptimo del problema lineal primal $\max w^T x$ sujeto a $x(\delta(v)) \leq 1$, para todo $v \in V$, y $x \geq 0$. Por (iii), podemos asumir que x^* es entero. En este caso, es fácil ver que las coordenadas de x^* son necesariamente 0 o 1. Sea M el conjunto de los arcos $e \in E$ tales que $x_e^* = 1$. Claramente M es un matching. Sigue que M es el matching más grande en G.

Sea y^* el óptimo del problema lineal dual $\min \sum_{v \in V} y_v$ sujeto a $y_u + y_v \geq w_{u,v}$ para todo $(u, v) \in E$, $y \geq 0$. Por (iv), podemos asumir que y^* es entero. En este caso, es fácil ver que las coordenadas de y^* son necesariamente 0 o 1. Sea C el conjunto de nodos $v \in V$ tales que $y_v = 1$. Si $e = (u, v) \in E$, entonces como $y_u + y_v \geq 1$, se tiene que $u \in C$ o $v \in C$, i.e., C es un cubrimiento de G. Sigue que C es el cubrimiento mas pequeño en G.

Por dualidad, sabemos que el óptimo del primal y el dual son iguales, i.e., el cardinal del matching más grande en G es igual al cubrimiento mas pequeño en G.