MA-47A Optimización Combinatorial **13 de Mayo, 2000**

Pauta Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: J. R. Correa*

PROBLEMA 1:

(i).- La idea es dividir cada nodo $v \in V$ en dos arcos v' y v'' y agregar un arco de v' a v'' con capacidad mínima $-\infty$ y capacidad máxima $t(v)$. El costo del arco (v', v'') se elije igual a 0. Todo arco $e = (u, v) \in E$ se reemplaza ahora por una arco en la nueva red que va de u'' a v' y se mantienen las capacidades mínimas, máximas, y costos.

Formalmente, se construye una nueva red $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ y se definen las funciones de capacidad inferior $\widetilde{l}:\widetilde{E} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, de capacidad superior $\widetilde{u}:\widetilde{E} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, y costos $\widetilde{c}:\widetilde{E} \to \mathbb{R}$ de forma que

$$\begin{aligned} \widetilde{V} &= \bigcup_{v \in V} \{v', v''\}, \\ \widetilde{E} &= \{(u'', v') : (u, v) \in E\} \cup \{(v', v'') : v \in V\}. \end{aligned}$$

Si $(u, v) \in E$, hacemos $\widetilde{l}(u'', v') = l(u, v)$, $\widetilde{u}(u'', v') = u(u, v)$, y $c(u'', v') = c(u, v)$. Si $v \in V$, hacemos $\widetilde{l}(v', v'') = -\infty$, $\widetilde{u}(v', v'') = t(u, v)$, y $c(v', v'') = 0$.

Afirmamos que podemos obtener una circulación óptima en G a partir de una circulación óptima en $\widetilde{G}$ y que los costos de dichas circulaciones son los mismos en ambos problemas. En efecto, basta ver que si $x = (x_e)_{e \in E}$ es una circulación factible en G que respeta las restricciones de capacidad en los nodos, entonces $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_{\widetilde{e}})_{\widetilde{e} \in \widetilde{E}}$ tal que $x_{u'', v'} = x_{u,v}$ si $(u, v) \in E$ y $x_{v', v''} = \sum_{u:(u,v) \in E} x_{u,v} = \sum_{u:(v,u) \in E} x_{v,u}$ es una circulación factible en $\widetilde{G}$ con costo $\sum_{e \in E} c(e) x_e$. Análogamente a toda circulación factible en $\widetilde{G}$ le podemos asociar una circulación factible en G del mismo costo.

(ii).- El Teorema de la Descomposición Conforme fue probado en cátedra. Consultar el cuaderno.

PROBLEMA 2:

(i).- Sea $g_{c,c'}$ el número de partidos que restan por jugar entre c y c', $c \neq c'$, que gana c. Observar que

$$\sum_{c \in \mathcal{A}} \left(g_c + \sum_{c' \in \mathcal{A}: c \neq c'} g_{c,c'} \right) = \sum_{c \in \mathcal{A}} g_c + \sum_{\{c,c'\} \in P: \{c,c'\} \subseteq \mathcal{A}} r_{c,c'}.$$

Si existe un conjunto $\mathcal{A}$ como el del enunciado, entonces del principio del palomar necesariamente hay un $c \in \mathcal{A}$ tal que

$$\frac{1}{|\mathcal{A}|} \left(\sum_{c \in \mathcal{A}} g_c + \sum_{\{c,c'\} \in P: \{c,c'\} \subseteq \mathcal{A}} g_{c,c'} \right) > N_{c^*},$$

i.e., siempre habrá un $c \in \mathcal{A}$ que ganará más partidos que c^* aunque c^* gane todos los partidos que le restan por jugar. Sigue que c^* no puede ganar el campeonato.

(ii).- Sea $x = (x_e)_{e\in E}$ un flujo factible de valor $\sum_{\{c,c'\}\in P} r_{c,c'}$ en la red descrita. Supongamos que el número de partidos que restan por jugar entre c y c', $c \neq c'$, que gana c es $g_{c,c'} = x_{c,\{c,c'\}}$ y que c^* gana todos los partidos que le restan por jugar. Por conservación de flujo en $\{c,c'\}$ debe tenerse que $g_{c,c'} + g_{c',c} = x_{\{c,c'\},r}$. Como el valor de x es $\sum_{c,c'\in C, c\neq c'} r_{c,c'}$, dadas las capacidades de los arcos que llegan a t, debe tenerse que todos estos están saturados, i.e., que $x_{\{c,c'\},r} = r_{c,c'}$. Luego, el número de partidos jugados entre c y c' es $g_{c,c'} + g_{c',c} = r_{c,c'}$. Además, por conservación de flujo, el flujo que entra a c es $\sum_{c'\neq c} g_{c,c'}$. Luego, por capacidad del arco (s,c) con $c \in C$, se tiene que

$$N_{c^*} \;\geq\; g_c + \sum_{c'\neq c} g_{c,c'}\,.$$

El término de la derecha en la desigualdad anterior representa el número de partidos ganados por c al final del campeonato y el término de la izquierda los partidos ganados por c^*. Luego, c^* gana el campeonato.

Supongamos ahora que c^* puede ganar el campeonato. Esto es, existen valores para $g_{c,c'}$, $c \neq c'$, tales que $g_{c,c'} + g_{c',c} = r_{c,c'}$ cualquiera sea $\{c,c'\} \in P$ y donde

$$g_c + \sum_{c'\in C: c'\neq c} g_{c,c'} \;\leq\; g_{c^*} + \sum_{c'\in C: c'\neq c^*} g_{c^*,c'} \;\leq\; N_{c^*}\,.$$

Sigue que un flujo factible en la red bajo consideración está dado por $x_{s,c} = N_{c^*} - g_c$ si $c \in C$, $x_{c,\{c,c'\}} = g_{c,c'}$ si $c \in C$ y $\{c,c'\} \in P$, y $x_{\{c,c'\}} = r_{c,c'}$ si $\{c,c'\} \in P$. El valor de x es igual al flujo neto que llega a t, i.e., $\sum_{\{c,c'\}\in P} r_{c,c'}$.

(iii).- Como $\delta(S)$ es un (s,t)–corte, $s \in S$ y $t \notin S$. Luego, $S = \{s\} \cup (S\cap C) \cup (S \cap P)$. Si c o c' está en S y $\{c,c'\} \notin S\cap P$, entonces la capacidad del corte $\delta(S)$ sería $+\infty$. Si $\{c,c'\} \in S\cap P$ y $c, c' \notin S$, entonces la capacidad del corte $\delta(S)$ decrecería en $r_{c,c'}$ al remover $\{c,c'\}$ de S. En ambos casos se contradice la minimalidad de $\delta(S)$, luego $S \cap P = \{\{c,c'\} \in P \,:\, c \in S \text{ o } c' \in S\}$. Sigue que la capacidad de $\delta(S)$ es

$$N_{c^*}|\mathcal{A}| - \sum_{c\in\mathcal{A}} g_c + \sum_{\{c,c'\}\in P:\{c,c'\}\not\subseteq\mathcal{A}} r_{c,c'} \;=\; N_{c^*}|\mathcal{A}| - \sum_{c\in\mathcal{A}} g_c - \sum_{\{c,c'\}\in P:\{c,c'\}\subseteq\mathcal{A}} r_{c,c'} + \sum_{\{c,c'\}\in P} r_{c,c'}\,.$$

Como c^* no puede ganar el campeonato, por (ii) no existe un flujo factible en la red de valor $\sum_{\{c,c'\}\in P} r_{c,c'}$. Luego, por el Teorema de flujo–máximo corte–mínimo, todo corte tiene capacidad menor que $\sum_{\{c,c'\}\in P} r_{c,c'}$. Por lo tanto,

$$N_{c^*}|\mathcal{A}| - \sum_{c\in\mathcal{A}} g_c - \sum_{\{c,c'\}\in P:\{c,c'\}\subseteq\mathcal{A}} r_{c,c'} \;<\; 0\,.$$

Despejando se obtiene el resultado deseado.

(iv).- Los flujos en distintas iteraciones del algoritmo de Edmonds y Karp se muestran en la Fig. 1 y los grafos auxiliares asociados en la Fig. 2. En todas las etapas, el camino aumentador de largo mínimo en caso que exista recorre tres arcos. En la primera etapa tomamos el camino aumentador $(s, c, \{a,c\}, t)$. Por dicho camino se puede empujar un máximo de 5 unidades de flujo. En la segunda etapa tomamos el camino aumentador $(s, d, \{c,d\}, t)$. Por dicho camino se puede empujar un máximo de 1 unidad de flujo. En la tercera etapa tomamos el camino aumentador $(s, d, \{a,d\}, t)$. Por dicho camino se puede empujar un máximo de 1 unidad de flujo. En el grafo auxiliar del flujo resultante no se puede llegar de s a t. Luego, el flujo es óptimo. Como el valor del flujo es $7 < 8 = \sum_{\{c,c'\}\in P} r_{c,c'}$ sigue, por (ii), que c^* no puede ganar el campeonato.

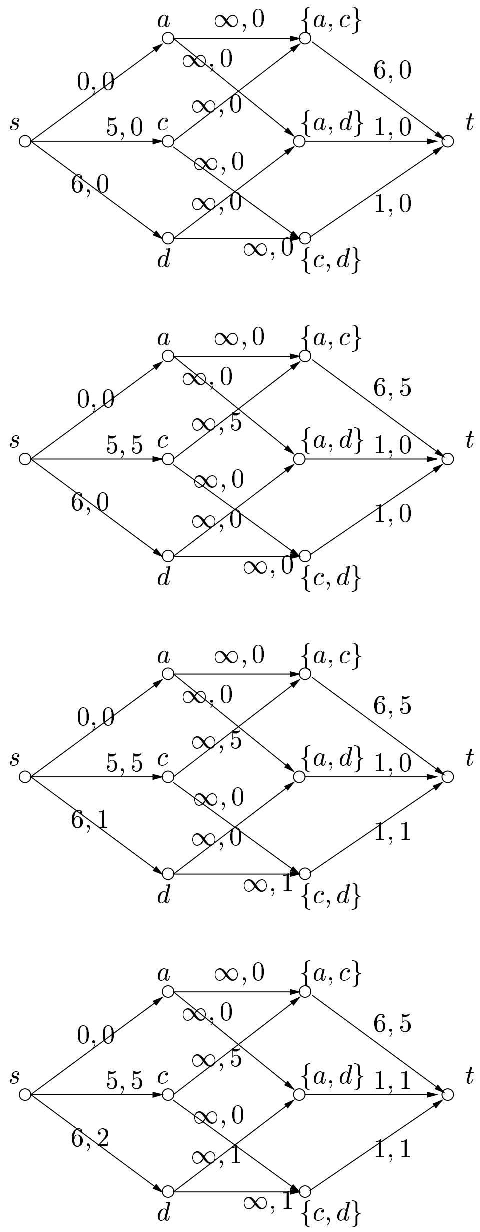

Figure 1: Flujos factibles en cada etapa del algoritmo de Edmonds y Karp. En cada arco se señala, primero la capacidad máxima y luego el flujo a través del arco.

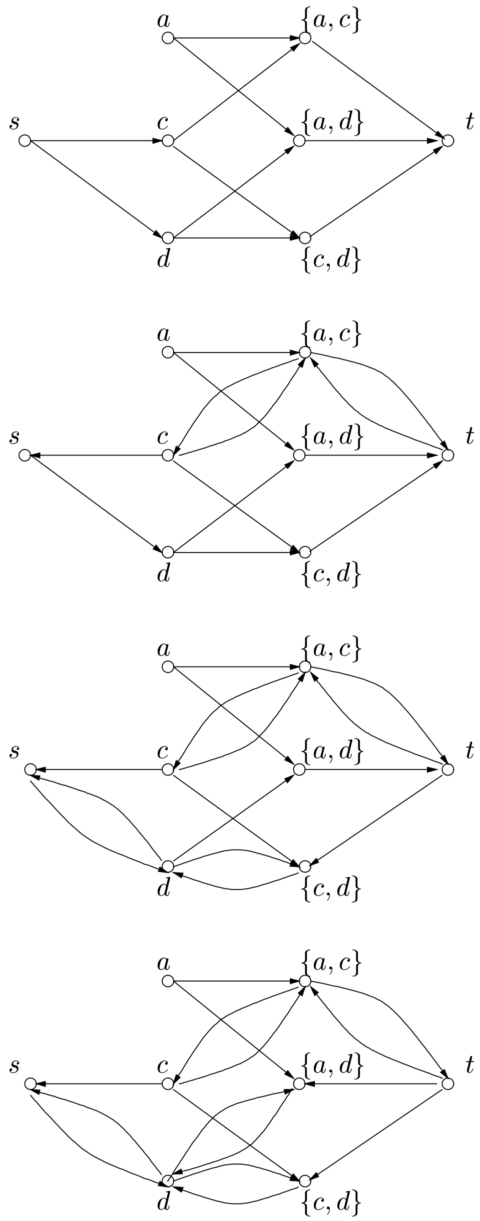

Figure 2: Grafos auxiliares.