MA-47A Optimización Combinatorial	**17 de Junio, 2000**

Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: J. Correa*

TIEMPO: 4.0 HRS.

En lo que sigue sea $G = (V, E)$ un grafo no–dirigido y $w \in \mathbb{R}^{|E|}$ una vector de peso en los arcos.

(i).- (1.0 pts) Pruebe que el problema de encontrar un matching de peso máximo se reduce al problema de encontrar un matching perfecto de peso máximo.

Indicación: Considere el grafo $\widehat{G}$ que consta de dos copias de G más arcos de peso nulo entre cada par de nodos en $\widehat{G}$ que sean copias del mismo nodo de G.

(ii).- (1.5 pts) Rehaga la demostración vista en clase del siguiente resultado:

Teorema 1 *Sea $PM(G)$ la envoltura convexa de los vectores indicatrices de matchings perfectos en G, i.e.,*

$$PM(G) \quad = \quad conv\{x \in \{0,1\}^{|E|} \; : \; x \text{ es indicatriz de un matching perfecto en } G\}\,.$$

Entonces, si G es un grafo bipartito, $PM(G)$ es igual al conjunto de los $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ tales que

$$x(\delta(v)) = 1\,, \text{ para todo } v \in V\,, \text{ y } \quad x \geq 0\,. \tag{1}$$

Indicación: Para una de las inclusiones suponga que $\widetilde{x}$ es vértice no integral del poliedro definido por (1). Asociele a $\widetilde{x}$ el grafo $\widetilde{G} = (V, \widetilde{E})$ eligiendo $\widetilde{E}$ apropiadamente y obtenga una contradicción.

(iii).- (1.0 pts) Sea $M(G)$ la envoltura convexa de los vectores indicatrices de matchings en G, i.e.,

$$M(G) \quad = \quad conv\{x \in \{0,1\}^{|E|} \; : \; x \text{ es indicatriz de un matching en G}\}\,.$$

Usando (ii) y el grafo auxiliar $\widehat{G}$ de la parte (i), pruebe que si G es bipartito, entonces $M(G)$ es igual al conjunto de los $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ tales que

$$x(\delta(v)) \leq 1 \text{ para todo } v \in V\,, \text{ y } \quad x \geq 0\,. \tag{2}$$

(iv).- (1.5 pts) El dual del problema lineal $\max w^T x$ sujeto a (2) es:

$$\begin{array}{lll} \min & \displaystyle\sum_{v \in V} y(v) & \\ \text{s. a.} & y_u + y_v \geq w_{u,v}\,, & \text{para todo } (u,v) \in E\,, \\ & y \geq 0\,. & \end{array} \tag{3}$$

Pruebe que si w es entero, y G bipartito, entonces (3) tiene una solución óptima entera.

<u>Indicación</u>: Para y factible, defina $W(y) = \{v \in V : y_v = 0\}$ y $J(y) = \{(u,v) \in E : y_u + y_v = w_{u,v}\}$. Luego considere y^* solución óptima para la cual $W(y^*) \cup J(y^*)$ es maximal y estudie las componentes conexas del grafo inducido por $J(y^*)$.

(v).- (1.0 pts) Aplique el teorema de dualidad para obtener una relación min–max y concluya el siguiente resultado de teoría de grafos:

Teorema 2 ***(de König-Egerváry)*** *Si G es un grafo bipartito, entonces el cardinal del matching más grande en G es igual al cardinal del cubrimiento más pequeño en G.*