MA-47A Optimización Combinatorial	**13 de Junio, 2000**

Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: J. R. Correa*

TIEMPO: 4.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- Suponga que se desea resolver el problema de circulación de costo mínimo en $G = (V, E)$ con función de costo $c: E \to \mathbb{R}$, y capacidades mínimas y máximas en los arcos dadas por $l: E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ y $u: E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ respectivamente. Además, se tiene una restricción de capacidad en los nodos, esto es, el flujo neto que puede entrar y salir de cada nodo no puede exceder $t: V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Formule el problema como uno de circulación de costo mínimo.

(ii).- Rehaga la demostración vista en cátedra del siguiente:

Teorema 1 ***(de la Descomposición Conforme)*** *Sea $G = (V, E)$ un digrafo. Pruebe que $x = (x_e)_{e\in E}$ es una circulación no nula en G, sí y sólo si, existen $k \leq |E|$ ciclos no orientados $C_1, \ldots, C_k$ en G y $\delta_{C_1}, \ldots, \delta_{C_k} \in \mathbb{R}$ positivos tales que para todo $e \in E$,*

$$x_e = \sum_{i=1}^{k} \delta_{C_i} f_{C_i}(e)\,,$$

donde dado un ciclo no orientado C en G la función f_C es tal que $f_C(e) = 1$ si C recorre e hacia adelante, $f_C(e) = -1$ si C recorre e hacia atrás, y $f_C(e) = 0$ en caso contrario.

Además, se tiene que si C_i ocupa e, entonces $x_e \neq 0$ y

$$x_e > 0 \iff C_i \text{ recorre } e \text{ hacia adelante}.$$

<u>Indicación</u>: Recuerde que si x es una circulación no nula en G entonces existe un $v \in V$ y otro nodo $u \in V$ que depende de v tal que $(v, u) \in E$ y $x_{v,u} > 0$ ó $(u, v) \in E$ y $x_{u,v} < 0$.

PROBLEMA 2: Sea C un conjunto de clubes de fútbol y sea c^* un club distinto a aquellos en C. En este problema estudiaremos una forma de determinar cuando es matemáticamente imposible que el club c^* gane el campeonato. Por simplicidad asumimos que no hay empates y que por lo tanto gana el club que gana más partidos.

Para cada c en C sea g_c el número de partidos ganados por c, y para c y c' en C tales que $c \neq c'$ sea $r_{c,c'} = r_{c',c}$ el número de partidos entre c y c' que quedan por jugar. Denotamos por N_{c^*} el número de juegos ganados por el club c^* al final de la temporada en caso de ganar todos los partidos que le restan por jugar, i.e., $N_{c^*} = g_{c^*} + \sum_{c\in C: c\neq c^*} r_{c^*,c}$.

Sea $P = \{\{c, c'\} : c, c' \in C, c \neq c'\}$ y consideremos la red de flujo $G = (V, E)$ donde $V = C \cup \{s, t\} \cup P$. Además, agregamos arcos de s a $c \in C$ con capacidad $N_{c^*} - g_c$. Para cada $\{c, c'\} \in P$

Club	Ganados	Por Jugar	a	b	c	d
a	33	8	-	1	6	1
b	29	4	1	-	0	3
c	28	7	6	0	-	1
d	27	5	1	3	1	-

Figura 1: Situación de un campeonato.

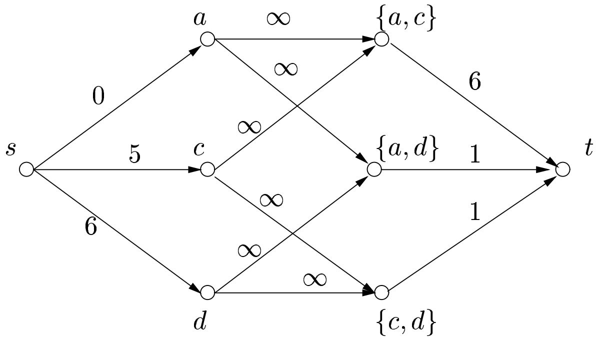

Figura 2: Red de flujo asociada al campeonato de la Fig. 1.

agregamos arcos $(c,\{c,c'\})$ y $(c',\{c,c'\})$ con capacidad infinita y arcos $(\{c,c'\},t)$ con capacidad $r_{c,c'}$. La red basada en los datos de la Fig. 1 se muestra en la Fig. 2, donde $C=\{a,c,d\}$ y $c^*=b$.

(i).- Aplique el principio del palomar para demostrar que si existe un $\mathcal{A}\subseteq C$ tal que

$$\sum_{c\in\mathcal{A}} g_c + \sum_{\{c,c'\}\in P:\{c,c'\}\subseteq\mathcal{A}} r_{c,c'} \quad > \quad |\mathcal{A}|\cdot N_{c^*}\,, \tag{1}$$

entonces c^* no puede ganar el campeonato. En lo que sigue probaremos la reciproca.

(ii).- Pruebe que el club c^* puede ganar el campeonato sí y sólo si existe $x=(x_e)_{e\in E}$ un flujo factible de valor $\sum_{\{c,c'\}\in P} r_{c,c'}$ en la red descrita.

(iii).- Suponga que el club c^* no puede ganar el campeonato. Sea $\delta(S)$ un (s,t)–corte mínimo en la red antes descrita. Pruebe que $S=\{s\}\cup(C\cap S)\cup\{\{c,c'\}\in P\,:\,c\in S \text{ o } c'\in S\}$. Calcule la capacidad de $\delta(S)$ y concluya que $\mathcal{A}=C\setminus S$ satisface (1).

(iv).- Suponga por simplicidad que sólo cuatro clubes participan en el campeonato y que la situación es como se describe en la Fig. 1. Ejecute el algoritmo de Edmonds y Karp para encontrar un flujo integral máximo partiendo de un flujo nulo (explicite cada paso), y determine si es que el club $c^*=b$ puede ganar.