MA-47A Optimización Combinatorial	15 de Abril, 2000

Control No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: J. R. Correa*

Tiempo: 4.0 hrs.

Problema 1:

(i).- (1.0 pts) Rehaga la demostración vista en cátedra que establece que si $G = (V, E)$ es un grafo no dirigido conexo, entonces $|E| \geq |V| - 1$.

(ii).- (1.0 pts) Sea G un grafo no dirigido con función de peso $w{:}E(G) \to \mathbb{R}$. Pruebe que si T es un árbol generador de peso mínimo de G, entonces para todo $e \in E(T)$ existe una partición $\{R, V(G) \setminus R\}$ de $V(G)$ tal que

$$w(e) \quad = \quad \min\{w(f) : f = (u,v) \in E, u \in R, v \in V(G) \setminus R\} \ .$$

(iii).- (2.0 pts) Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ se dice bipartito si V es la unión disjunta de L y R, y además $E \subseteq (L \times R) \cup (R \times L)$. Pruebe que G es bipartito sí y sólo si sólo posee ciclos de largo par.

(iv).- (2.0 pts) Modifique BELLMAN-FORD (ver código en Fig. 1) de forma que si G contiene ciclos de peso negativo, entonces el algoritmo encuentre un tal ciclo en un tiempo adicional $O(|V(G)|)$. Justifique la corrección de su extensión.

```
Entrada:  G = (V,E), s ∈ V, y w:E → ℝ.
Código:   for all v ∈ V do
                d(v) ← ∞, π(v) ← NIL
          d(s) ← 0
          for i = 1 to |V| − 1 do
                for all (u,v) ∈ E do
                      if d(v) > d(u) + w(u,v)
                            then d(v) ← d(u) + w(u,v); π(v) ← u
          for all (u,v) ∈ E do
                if d(v) > d(u) + w(u,v)
                      then return FALSE
          return TRUE
```

Figura 1: BELLMAN-FORD

Problema 2:

Sea $G = (V, E)$ un digrafo con función de peso $w{:}E \to \mathbb{R}$, y $n = |V|$. Definimos el peso promedio del ciclo $c = (u_0, \ldots, u_{l-1})$ por

$$\mu(c) \quad = \quad \frac{1}{l}\left(w(u_0, u_1) + w(u_1, u_2) + \ldots + w(u_{l-2}, u_{l-1}) + w(u_{l-1}, u_0)\right) .$$

Sea $\mu^* = \min_c \mu(c)$, donde c varía sobre todos los ciclos en G. Un ciclo c tal que $\mu(c) = \mu^*$ se llama ciclo de peso promedio mínimo. Este problema investiga una forma eficiente (propuesta por Karp) de calcular μ^*.

Asumiremos sin pérdida de generalidad que todo vértice $v \in V$ es alcanzable desde una fuente $s \in V$. Sea $\delta(s, v)$ el peso de un camino de largo mínimo de s a v, y sea $\delta_k(s, v)$ el peso del camino de largo mínimo de s a v que contiene exactamente k arcos. Si no hay un camino de s a v con exactamente k arcos, entonces $\delta_k(s, v) = \infty$.

(i).- Muestre que si $\mu^* = 0$, entonces G no contiene ciclos de peso negativo y para todo $v \in V$,

$$\delta(s, v) \quad = \quad \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v) .$$

(ii).- Muestre que si $\mu^* = 0$, entonces para todo $v \in V$,

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \quad \geq \quad 0 .$$

(iii).- Sea c un ciclo de peso nulo, y sean u y v dos vértices en c. Suponga que el peso del camino de u a v en c es δ. Pruebe que $\delta(s, v) = \delta(s, u) + \delta$.

(iv).- Pruebe que si $\mu^* = 0$, entonces existe un vértice v en un ciclo de peso promedio mínimo tal que

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \quad = \quad 0 .$$

<u>Indicación</u>: Pruebe que el camino de peso mínimo hasta cualquier nodo del ciclo de peso promedio mínimo puede ser extendido a lo largo del ciclo para obtener un camino de peso mínimo hasta el próximo nodo del ciclo.

(v).- Estudie el efecto que tiene en μ^* incrementar en una constante t el peso de cada arco de G. Use sus conclusiones para probar que

$$\mu^* \quad = \quad \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} .$$

(vi).- De un algoritmo a tiempo $O(|V| \cdot |E|)$ para calcular μ^*.