Ma4701 Optimización Combinatorial	**06 de Enero, 2012**

Pauta Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: A. Fielbaum, D. Salas*

Problema 1:

(i).- Sea M un matching de G de cardinalidad máxima, es decir $|E(M)| = \nu(G)$. Sea F' el conjunto de arcos de M. Luego, $|F'| = \nu(G)$. Por cada nodo M-expuesto de G, digamos v, elegir uno de los arcos incidentes en v, que en lo sucesivo denotaremos $f(v)$, y agregarlo a F''. Como M es matching de tamaño máximo, todo arco en F'' tiene uno de sus extremos M-cubierto y el otro M-expuesto. Por lo tanto, si $v \neq v'$ son nodos M-expuestos, se tiene que $f(v') \neq f(v'')$. Luego, la cardinalidad de F'' es igual a la cantidad de nodos M-expuestos, es decir $|F''| = |V| - 2\nu(G)$. Como F'' no contiene arcos del matching M, se tiene que F' y F'' son disjuntos. Luego, si $F = F' \cup F''$, entonces $|F| = |V| - \nu(G)$. Afirmamos que F es un recubridor de arcos de G. En efecto, consideremos el nodo v de G. Si v es un nodo M-cubierto, entonces existe un arco $e \in E(M) = F' \subseteq F$ del cual v es un extremo. Si v está M-expuesto, entonces por definición de F'', existe un arco $f \in F'' \subseteq F$ del cual v es un extremo. En resumen, F es un recubrimiento de arcos de G.

La misma construcción descrita del recubridor de arcos F entrega un algoritmo para encontrar F. Basta determinar un matching de cardinalidad máxima M, agregar todos los arcos de M al recubridor, y seleccionar un arco incidente en cada nodo M-expuesto para ser incorporado al recubridor. El tiempo requerido será $O(|V| + |E|)$ más el tiempo necesario para encontrar el matching de cardinalidad máxima.

(ii).- Supongamos primero que M' es un matching en G' tal que ninguno de sus arcos es incidente en el nodo $\mathcal{C}$ de G'. Entonces, tenemos que $E(M') \subseteq E$. Sea M'' un matching de cardinalidad máxima con sus arcos completamente contenidos en $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es ciclo impar, se tiene que M'' cubre todos los nodos de $\mathcal{C}$ salvo uno. Sea $M = M' \cup M''$. Notar que M es matching de G que tiene la misma cantidad de nodos M-expuestos en $G|_{V\setminus V(\mathcal{C})}$ que los que M' tiene en $G|_{V'\setminus\{\mathcal{C}\}}$. Recordando que $\mathcal{C}$ es un nodo M'-expuesto en G' y que hay un único nodo M-expuesto en $G|_{V(\mathcal{C})}$, se obtiene la conclusión deseada.

Supongamos ahora que $\mathcal{C}$ es un nodo M'-cubierto en G'. Sea $e = v\mathcal{C}$ el arco de M' que tiene a $\mathcal{C}$ como extremo. Dado que $e \in E(M') \subseteq E'$, y por definición de E', sigue que existe un nodo $u \in V(\mathcal{C})$ tal que $uv \in E$. Sea M'' un matching perfecto de $\mathcal{C} - u$ (observar que dicho matching existe porque $\mathcal{C} - u$ es un camino de largo impar). Sea $M = (M' \setminus \{v\mathcal{C}\}) \cup M'' \cup \{uv\}$. Notar que M es matching en G. Además, observar que M cubre todos los nodos del ciclo $\mathcal{C}$, que M' cubre el nodo $\mathcal{C}$, y que los nodos de $G|_{V\setminus V(\mathcal{C})}$ cubiertos por M coinciden con los nodos de $G'|_{V\setminus\{\mathcal{C}\}}$ cubiertos por M', i.e. nuevamente se tiene la conclusión deseada.

Problema 2:

(i).- La matriz M tendrá una fila por cada nodo $v \in V \setminus \{s,t\}$ correspondiente a la identidad

$$\sum_{e \in E : t(e)=v} f_e - \sum_{e \in E : h(e)=v} f_e \;=\; 0\,.$$

Específicamente, para $v \in V \setminus \{s,t\}$ y $e \in E$,

$$M_{v,e} = \begin{cases} +1\,, & \text{si } t(e)=v, \\ -1\,, & \text{si } h(e)=v, \\ 0\,, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se tiene entonces que $-M$ es la matriz nodo-arco incidencia de $G=(V,E)$ salvo porque se han removido las filas correspondientes a $v \in \{s,t\}$. Por lo visto en clases, una matriz nodo-arco incidencia es una matriz de red, luego totalmente unimodular. Observando que la propiedad de total unimodularidad se preserva al remover filas de una matriz o multiplicarlas por -1 (porque el valor absoluto de los subdeterminantes de la matriz reducida no cambian con respecto al valor que tenían en la matriz original) se concluye que $-M$ es totalmente unimodular.

Por otro lado, notar que $f \geq 0$ es factible para (PL') si y solo si

$$\begin{pmatrix} M \\ -M \\ I \end{pmatrix} f \;\leq\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}\,.$$

Sea A la matriz del lado izquierdo de la anterior desigualdad y b el vector del lado derecho. Afirmamos que A es totalmente unimodular si y solo si M es totalmente unimodular. En efecto, basta observar que cualquier submatriz X de A consta de las mismas filas de M pero con signo cambiado, en cuyo caso el determinante de X es 0, o en caso contrario el determinante de X es igual a un subdeterminante de M, que por total unimodularidad debe ser -1, 0, o $+1$. Por el Teorema de Hoffman-Kruskal sigue que el poliedro $P=\{f \,:\, f \geq 0, Af \leq b\}$ es integral (todos sus vértices son integrales) para todo b integral. Como P corresponde exactamente al poliedro de vectores factibles para el problema del (s,t)-flujo máximo en G, y dado que el óptimo se alcanza en un vértice de G, concluimos que existe un (s,t)-flujo máximo integral óptimo para (PL).

(ii).- Primero observemos que (y,z) es factible para (D') si y solo si

$$\begin{pmatrix} -I & -M^T \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \;\leq\; \begin{pmatrix} -w \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Sea B la matriz del lado izquierdo de la anterior desigualdad y d el vector del lado derecho. Afirmamos que B es totalmente unimodular. En efecto, basta observar que cualquier submatriz X de B es igual a un subdeterminante de $-M^T$, que por total unimodularidad de M debe ser -1, 0, o $+1$. Luego, por corolario visto del Teorema de Hoffman-Kruskal, sigue que el poliedro $Q=\{x \,:\, Bx \leq d\}$ es un poliedro integral si d es integral, como en nuestro caso. El mismo planteamiento esbozado al final del punto (i) anterior permite concluir lo deseado.

(iii).- De las partes (i) y (ii), podemos asumir sin pérdida de generalidad que tanto f^* e (y^*, z^*) son integrales. Denotemos por $f^*_s = w^T f^*$ el flujo neto en s dado por f^*.

Sea $S = \{s\} \cup \{v \in V \setminus \{t\} \,:\, z_v^* \leq -1\}$. Claramente, S es un (s,t) corte. Afirmamos que la capacidad de $\delta(S)$ es igual a f_s^*. En efecto, como $f_e^* \leq c_e$ para todo $e \in E$, entonces el flujo neto en s que es igual al flujo neto a través de $\delta(S)$ está acotado por $c(\delta(S))$. La otra desigualdad, $f_s^* \geq c(\delta(S))$ es más interesante. Para probarla, observar que dado que (y^*, z^*) es factible para (D'), y considerando la desigualdad correspondiente a la fila indexada por $e = uv \in E$ del sistema $y + M^T z \geq w$, tenemos que:

- Si $uv \in E$ y $u, v \neq s$, entonces $y_{uv}^* + z_u^* - z_v^* \geq 0$.
- Si $sv \in E$ y $v \neq t$, entonces $y_{sv}^* - z_v^* \geq +1$.

Luego, si $uv \in \delta(S)$, $u \in S \setminus \{s\}$, y $v \notin S$, entonces como z^* es integral, se tiene que $z_u^* \leq -1$, $z_v^* \geq 0$, y por lo tanto $y_{uv}^* \geq z_v^* - z_u^* \geq 1$. Como y^* es óptimo, $c \geq 0$, y dado que $y_{uv} \geq z_v - z_u$ e $y_{uv} \geq 0$ son las únicas restricciones en que la variable y_{uv} esta involucrada, es fácil ver que en el óptimo y_{uv} toma el menor valor no-negativo posible. Por lo tanto, se debe tener que $y_{uv}^* = 1$. Un argumento similar permite concluir que si $sv \in \delta(S)$, con $v \notin S$, entonces $y_{sv}^* = 1$. Por dualidad fuerte y dado que $y^* \geq 0$ se tiene que $f_s^* \geq y^T c \geq \sum_{e \in \delta(S)} y_e c(e) = c(\delta(S))$. Sigue que el flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.

Problema 3:

(i).- Supongamos primero que (L) es infactible. Si en (PLE) la variable x_k pudiese tomar el valor 1, entonces la i-ésima desigualdad implícita en el sistema $Ax \leq b$ sería equivalente a

$$\sum_{j \neq k} a_{ij} x_j \leq b_i - a_{ik} \,.$$

Como (L) es infactible, el sistema de desigualdades $\sum_{j \neq k} a_{ij} x_j \leq b_i - a_{ik}$ con $i = 1, \ldots, m$ es infatible. Luego, necesariamente una solución factible x de (PLE) debe ser tal que $x_k = 0$.

Supongamos ahora que (L) es factible y consideremos x factible para (PLE). Queremos mostrar que se satisface $\alpha'_k x_k + \sum_{j \neq k} \alpha_j x_j \leq \beta$ cualquiera sea $\alpha'_k \leq \delta_k$. Consideremos dos casos. Primero, supongamos que $x_k = 1$. Dado que la i-ésima desigualdad del sistema $Ax \leq b$ equivale a $\sum_{j \neq k} a_{ij} x_j \leq b_i - a_{ik} x_k = b_i - a_{ik}$, sigue que si x es factible para (PLE), entonces también lo es para (L), Luego, por definición de δ_k se tiene que

$$\beta - \sum_{j \neq k} \alpha_j x_j \geq \delta_k \geq \alpha'_k = \alpha'_k x_k \,.$$

Sigue que $\alpha'_k x_k + \sum_{j \neq k} \alpha_j x_j \leq \beta$ como se quería demostrar. Supongamos ahora que $x_k = 0$. Como $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \leq \beta$ es factible para (PLE), se tiene entonces que

$$\alpha'_k x_k + \sum_{j \neq k} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \leq \beta \,,$$

estableciéndose así la conclusión deseada.

(ii).- Debemos resolver:

$$
\begin{aligned}
(L) \qquad \delta_k &\stackrel{\text{def}}{=} 2 - \text{máx}\{x_2 + x_3 + x_5\} \\
&\text{s.a.} \quad 7x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 + 5x_6 \leq 1\,, \\
&\qquad\quad x_j \in \{0,1\}\,, \quad \forall j \neq k\,.
\end{aligned}
$$

Claramente, en (L) toda solución factible satisface $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, de donde es fácil concluir que en la solución óptima de (L) se tiene que $x_3 = 1$ y por lo tanto $\delta_k = 2 - 1 = 1$. Tomando $\alpha'_k = \delta_k = 1$ obtenemos la desigualdad válida $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \leq 2$ siendo esta la desigualdad más fuerte que se puede generar vía un lifting de la variable x_1.