Ma4701 Optimización Combinatorial **26 de Noviembre, 2011**

Pauta Control No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: A. Fielbaum, D. Salas*

Problema 1:

(i).- La idea de la demostración es parecida a la de la demostración de corectitud del Algoritmo de Kruskal.

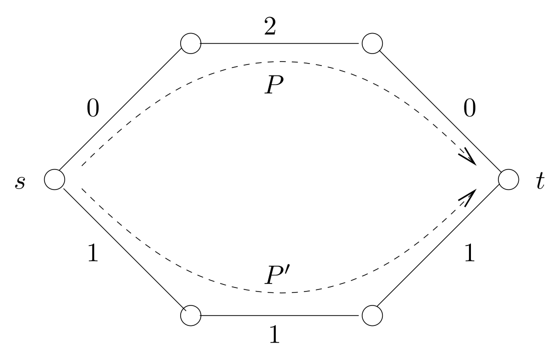
Sea T un árbol generador de G de peso mínimo. Sea e un arco de T tal que $\omega(e) = \max_{f \in E(T)} \omega(f)$. Para efectos de obtener una contradicción, supongamos que T^* es una solución óptima de MinMaxAG en la instancia (G, ω) de valor $\omega^* = \max_{f \in E(T^*)} \omega(f) < \omega(e)$. Por propiedades conocidas de árboles, se tiene que $T^* + e$ tiene un cíclo que contiene a e, digamos el cíclo C^*. Sea e^* un arco de T^* en el cíclo C^* con un extremo en cada una de las dos componentes conexas distintas de $T - e$ (e^* existe dado que T^* es generador). En particular, notar que $\omega(e^*) \leq \omega^* < \omega(e)$. Luego, $T' = (T - e) + e^*$ es un árbol generador de G de peso $\omega(T') = \omega(T) - \omega(e) + \omega(e^*) < \omega(T)$ contradiciendo la optimalidad de T en tanto árbol generador de peso mínimo de G.

(ii).- Sea $\omega^* = \max\{\omega(e) : e \in E(T^*)\}$ y $\omega' = \min\{\omega(e) : E(e) \text{ contiene un AG de } G\}$.

Veamos primero que $\omega^* \geq \omega'$. Sea e^* un arco de T^* de peso ω^* (existe por definición de ω^*). Observar que T^* es un subgrafo de $E(e^*)$. Por definición de ω', sigue que $\omega^* \geq \omega'$.

Veamos ahora que $\omega^* \leq \omega'$. Sea e' un arco de $E(G)$ tal que $\omega(e') = \omega'$ y T' un árbol generador de G cuyos arcos están contenidos en $E(e')$ (tanto e' como T' existen por definición de ω'). Como T^* es solución óptima de MinMaxAG, sigue que $\omega^* \leq \max_{f \in E(T')} \omega(f) \leq \max_{f \in E(e')} \omega(f) \leq \omega(e') = \omega'$.

(iii).- Basta considerar la red que se ilustra en la siguiente figura (los valores núméricos asociados a cada arco representan sus costos). Claramente el (s, t) camino de costo mínimo es P (ver figura), cuyo arco de mayor costo tiene costo 2. Por otro lado, la solución óptima de MinMaxCM es P' (ver figura), cuyo arco de mayor costo tiene costo de solamente 1.



(iv).- La idea del algoritmo se basa en primero adaptar lo observado en la parte (ii) al problema MinMaxCM y luego explotarlo algorítmicamente. Específicamente, afirmamos que si P^* es una solución óptima de MinMaxCM en la instancia (G, c, s, t) y se define $E(e) = \{f \in E(G) : c(f) \leq c(e)\}$, entonces se tiene que

$$\text{máx}\{\omega(e) : e \in E(P^*)\} = \text{mín}\{\omega(e) : E(e) \text{ contiene un } (s,t)\text{-dicamino en } G\} . \qquad (1)$$

La demostración de la afirmación es una simple adaptación de la demostración de la parte (ii), y por lo tanto la obviamos.

Consideremos entonces el siguiente algoritmo $\mathcal{A}_{MinMaxCM}$:

Algorithm 1: $\mathcal{A}_{MinMaxCM}$

input : $G = (V, E)$ digrafo, $c : E \to \mathbb{R}$, $s, t \in V$.
output: P un (s,t)-dicamino en G que minimiza $\text{máx}_{e \in E(P)} c(e)$.
ordenar E como $e_1, \ldots, e_m$ tal que $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \ldots \leq c(e_m)$;
for $i \leftarrow 1$ **to** m **do**
  $F \leftarrow E(e_i)$;
  if (V, F) *contiene un* (s,t)*-dicamino* P **then**
    return P
return *"No hay* (s,t)*-dicaminos en* G*"*

La correctitud del algoritmo recién descrito es consecuencia inmediata de la identidad (1).

Ordenar los arcos de $G = (V, E)$ de acuerdo a la función de costo $c(\cdot)$ toma $O(|E| \log |E|)$. Notar que toma $O(|V| + |E|)$ decidir si existe un (s,t)-dicamino en cualquier subgrafo H de G (dado que se puede hacer vía un algoritmo de búsqueda en profundidad). Sigue que $\mathcal{A}_{MinMaxCM}$ puede implementarse trivialmente de forma que tome $O(|E| \log |E| + |E|(|V| + |E|)) = O(|E|^2)$.

Problema 2:

(i).- Para resolver el problema lo reformularemos como uno equivalente de flujo en una red con $2n^2 + 2$ nodos y $O(n^2)$ arcos. A cada nodo (i, j) de la grilla le asociaremos dos nodos de la red de flujo, que denotaremos por (i, j, col) e (i, j, cab) (col por cola y cab por cabeza). La nueva red tendrá además una fuente s y un sumidero t. En total, un conjunto V de $2n^2 + 2$ nodos. El conjunto de arcos E está dado por:

- Para cada (i_t, j_t, col) tal que $t \in [m]$, un arco de s a (i_t, j_t, col).
- Para cada (i, j, cab) tal que $i \in \{1, n\}$ o $j \in \{1, n\}$ un arco de (i, j, cab) a t.
- Un arco de (i, j, cab) a (i', j', col) si $i = i'$ y $|j - j'| = 1$, o $j = j'$ y $|i - i'| = 1$.
- Un arco de (i, j, col) a (i, j, cab) para todo $i, j \in [n]$.

La capacidad de todos los arcos la fijamos en 1. Claramente se tiene que $|E| = m + (4n-2) + O(n^2) = O(m + n^2) = O(n^2)$.

Sea $G = (V, E)$ y denotemos por $u : E \to \mathbb{R}$ la función de capacidad. Afirmamos que Escape tiene una solución Factible si y solo si la red G con función de capacidad u tiene un flujo máximo de valor m.

Supongamos primero que Escape es Factible. Sean $P_1, \ldots, P_t$ como en la descripción del problema. Definimos $x : E \to \mathbb{R}_+$ tal que $x(e) = 1$ si:

- e es un arco que sale de s, o
- e es un arco que va de (i, j, cab) a t tal que (i, j) es algún nodo del borde de la grilla en el que termina alguno de los caminos P_t, o
- e es un arco de (i, j, col) a (i, j, cab) tal que el nodo de la grilla (i, j) es un nodo de alguno de los caminos P_t, o
- e es un arco de (i, j, cab) a (i', j', col) tal que el arco de la grilla que va de (i, j) a (i', j') pertenece a algún camino P_t.

En caso contrario, hacemos $x(e) = 0$.

Veamos que x es flujo en G. Sea (i, j, cab) nodo de G. Si (i, j) es un nodo de la grilla perteneciente a algún camino $P_1, \ldots, P_m$, digamos P_t, entonces se tendrá que $x(e) = 1$ donde e es el arco de (i, j, col) a (i, j, cab). Si (i, j) está en el borde de la grilla, entonces se tendrá que $x(f) = 1$ donde f es el arco que va de (i, j, cab) a t, en caso contrario, y dado que P_t debe terminar en algún nodo del borde de la grilla, tomamos f como el arco que va de (i, j, cab) a (i', j', col) donde (i', j') es el nodo de la grilla visitado por P_t después de (i, j). Como los $P_1, \ldots, P_m$ son nodo disjuntos, todo el resto de los arcos incidentes en (i, j, cab) distintos a e y f son de flujo 0. Sigue que se conserva el flujo en el nodo (i, j, cab). El análisis de los nodos del tipo (i, j, col) es similar.

Por construcción se tiene que x es factible, y que su valor es m (el flujo neto que sale de s). Esto concluye la demostración de que G con función de capacidad u posee un (s, t) flujo de valor m.

Supongamos ahora que G con función de capacidad u posee un flujo factible x de valor m. Como la función de capacidades es constante igual a 1, en particular es integral. Por resultado visto, podemos asumir que x es integral, más aún, que toma valores en $\{0, 1\}$. Por la equivalencia entre el problema del (s, t)-flujo máximo y el de maximizar el número de (s, t)-dicaminos, sigue que existen (s, t)-dicaminos $P_1, \ldots, P_m$ en G. Estos caminos se pueden mapear de manera natural a caminos $Q_1, \ldots, Q_m$ en la grilla de $n \times n$. En efecto, si el camino en G esta dado por la secuencia de nodos $s, (a_1, b_1, col), (a_1, b_1, cab), (a_2, b_2, col), \ldots, (a_\ell, b_\ell, col), (a_\ell, b_\ell, cab), t$, entonces tomamos el camino $(a_1, b_1), \ldots, (a_\ell, b_\ell)$ en la grilla. Los Q_i's serán nodo disjuntos dado que en G solo uno de los P_j's puede usar el arco que va de (a, b, col) a (a, b, cab). Cada Q_i debe terminar en un (a, b) en el borde de la grilla, dado que solo los nodos del tipo (a, b, cab) están conectados a t en G. Dado que salen m caminos de s en la red G, que s tiene exactamente m arcos salientes, y que cada arco tiene capacidad 1, se debe tener que cada camino P_s ocupa un arco distinto. Sigue que por el arco que va de (i_s, j_s, col) a (i_s, j_s, cab) pasa un único camino, digamos P_s. Luego, el camino Q_s en la grilla parte de (i_s, j_s). En resumen, el problema del Escape tiene solución factible.

De la discusión anterior, sigue que cualquier algoritmo de flujo máximo aplicado a la red de flujo G con capacidad u puede usarse para resolver el problema de Escape. Si el valor del flujo máximo resultante es m, entonces la instancia del problema del Escape es Factible. Si usamos, por ejemplo el algoritmo de flujo de Edmonds-Karp, el tiempo de ejecución será $O(|V||E|^2) = O(n^6)$.

(ii.1).- Sea x' el flujo que se obtiene al empujar ϵ unidades de flujo de v a w, i.e.

- $x'_e = x_e$ si $e \notin \{vw, wv\}$.
- Si $vw \in E$ y $wv \notin E$, entonces $x'_{vw} = x_{vw} + \epsilon$.
- Si $wv \in E$ y $vw \notin E$, entonces $x'_{wv} = x_{wv} - \epsilon$.
- Si $vw, wv \in E$, entonces $x'_{wv} = x_{wv} - \text{mín}\{\epsilon, x_{wv}\}$ y $x'_{vw} = x_{vw} + \epsilon - \text{mín}\{\epsilon, x_{wv}\}$.

Veamos que x' es preflujo. En efecto, si $u \in V \setminus \{s, t\}$, entonces

- $f_{x'}(u) = f_x(u) \geq 0$ si $u \notin \{v, w\}$.
- como $\epsilon \leq f_x(v)$ se tiene que $f_{x'}(v) = f_x(v) + (x'_{wv} - x_{wv}) - (x'_{vw} - x_{vw}) = f_x(v) - \epsilon \geq f_x(v) - f_x(v) = 0$.
- Dado que $\tilde{c}_{vw}, f_x(v) > 0$, se tiene que $\epsilon \geq 0$, luego $f_{x'}(w) = f_x(w) + (x'_{vw} - x_{vw}) - (x'_{wv} - x_{wv}) = f_x(w) + \epsilon \geq f_x(w) \geq 0$.

Veamos ahora que x' es preflujo factible. Bastará probar que $0 \leq x'_{vw} \leq c_{vw}$. En efecto, dado que $\tilde{c}_{vw}, f_x(v) \geq 0$, se tiene que $\epsilon \geq 0$. Consideremos los siguientes casos:

- Supongamos que $vw \in E$ y $wv \notin E$ (en particular $x_{wv} = 0$ y $\tilde{c}_{vw} = c_{vw} - x_{vw}$). Luego, $x'_{vw} = x_{vw} + \epsilon \geq x_{vw} \geq 0$. Por otro lado, $x'_{vw} = x_{vw} + \epsilon \leq x_{vw} + \tilde{c}_{vw} = c_{vw}$.
- Supongamos que $wv \in E$ y $vw \notin E$ (en particular $x_{vw} = c_{vw} = 0$ y $\tilde{c}_{vw} = x_{wv}$). Luego, $x'_{wv} = x_{wv} - \epsilon \leq x_{wv} \leq c_{wv}$. Por otro lado, $x'_{wv} = x_{wv} - \epsilon \geq x_{wv} - \tilde{c}_{vw} = 0$.
- Supongamos que $vw, wv \in E$. Luego, $x'_{wv} = x_{wv} - \text{mín}\{\epsilon, x_{wv}\} \geq 0$ y $x'_{wv} = x_{wv} - \text{mín}\{\epsilon, x_{wv}\} \leq x_{wv} \leq c_{wv}$. Además, $x'_{vw} = x_{vw} + \text{máx}\{0, \epsilon - x_{wv}\} \leq x_{vw} + \text{máx}\{0, c_{vw} - x_{vw}\} = c_{vw}$ y $x'_{vw} = x_{vw} + \text{máx}\{0, \epsilon - x_{wv}\} \geq x_{vw} \geq 0$.

(ii.2).- Como G tiene $|V|$ nodos, $h(t) = 0$ y $h(s) = |V|$, por principio del palomar debe existir un k tal que $h(v) \neq k$. Sea $R = \{v \in V : h(v) > k\}$. Claramente $s \in R$ y $t \notin R$. Sea $vw \in E$ con $v \in R$ y $w \notin R$. Por definición de R tenemos que $h(w) \leq k - 1$ y que $h(v) \geq k + 1$. Si vw fuese un arco de $G(x)$, por definición de función de altura, tendríamos que $k + 1 \leq h(v) \leq h(w) + 1 \leq k$, contradicción. Luego, debemos tener que $x_{vw} = c_{vw}$. De manera análoga se analiza el caso en que $vw \in E$ con $w \in R$ y $v \notin R$. En efecto, por definición de R tenemos que $h(w) \geq k + 1$ y que $h(v) \leq k - 1$. Si wv fuese un arco de $G(x)$, por definición de función de altura, tendríamos que $k + 1 \leq h(w) \leq h(v) + 1 \leq k$, contradicción. Luego, debemos tener que $x_{vw} = 0$.