Ma4701 Optimización Combinatorial	**21 de Enero 2012**

Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: A. Fielbaum, D. Salas*

Tiempo: 3.5 hrs.

Problema 1:

(i).- (3.0 pts) Dada una matriz $M = (m_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ a coeficientes enteros, al vector $R = (r_i)_{i=1}^{n}$ tal que $r_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$ se le llama vector suma por filas. Análogamente, al vector $C = (c_j)_{j=1,\ldots,n}$ tal que $c_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}$ se le llama vector suma por columnas.

Usando técnicas/argumentos de flujos determine si existe o no una matriz M a coeficientes 0-1 cuyos vectores de suma por columna y por fila son $(4,1,4,1,1)$ y $(1,4,1,4,1)$ respectivamente. Si la matriz existe de un ejemplo (y explique como lo encontro), y en caso contrario justifique porque no puede existir.

(ii).- (3.0 pts) Sea $G = (V, E)$ un grafo (no dirigido) con pesos no-negativos en los arcos y sean $v \neq w$ nodos de G. Nuestro objetivo es diseñar un algoritmo que determine, entre todos los v-w caminos en G, uno de peso mínimo y largo par.

Considere la siguiente construcción. Sea $H = G - v$ y H' una copia de $G - w$ tal que $V(H') = \{u' : u \in V(G - w)\}$. Sea además M el conjunto de arcos uu' tales que $u \in V \setminus \{v, w\}$. Finalmente, sea $G' = (V', E')$ tal que $V' = V(H) \cup V(H')$ y $E' = E(H) \cup E(H') \cup M$. A cada arco e' de G' correspondiente a una copia de un arco e de G se le asigna el peso de e. A los arcos de G' que están en M se les asigna el peso 0.

Pruebe que un matching perfecto de peso mínimo en G' puede usarse para encontrar un v-w camino en G de peso mínimo y largo par (justifique).

Problema 2: Dado un grafo $G = (V, E)$, una función de peso $w : E \to \mathbb{N}$, y un entero positivo $k \leq |V|/2$, considere el problema consistente en encontrar $U \subseteq V$ tal que $|U| = k$ y que maximice $w(\delta(U)) = \sum_{e \in \delta(U)} w(e)$. Denotemos por $OPT(G, w, k)$ el óptimo del referido problema en la instancia (G, w, k).

(i).- (1.0 pts) Pruebe que el óptimo del siguiente programa lineal entero es igual a $OPT(G, w, k)$.

$$
\begin{aligned}
(PLE) \qquad & \text{máx} \sum_{e=uv \in E} w(e)(x_u + x_v - 2x_u x_v) \\
& \text{s.a.} \quad \sum_{v \in V} x_v = k\,, \\
& \qquad x_v \in \{0,1\} \quad \forall v \in V\,.
\end{aligned}
$$

(ii).- (1.0 pts) Pruebe que para toda solución factible x de (PLE) existe una solución factible y de idéntico costo de

$$
\begin{aligned}
(PL) \qquad & \text{máx} \sum_{e \in E} w(e) z_e \\
& \text{s.a.} \quad z_{uv} \ \leq \ x_u + x_v \quad \forall e = uv \in E\,. \\
& \qquad\quad z_{uv} \ \leq \ 2 - x_u - x_v \quad \forall e = uv \in E\,. \\
& \qquad\quad \sum_{v \in V} x_v \ = \ k\,, \\
& \qquad\quad 0 \leq z_e \leq 1 \quad \forall e \in E\,, \\
& \qquad\quad 0 \leq x_v \leq 1 \quad \forall v \in V\,.
\end{aligned}
$$

(iii).- (1.5 pts) Sea $F(x) = \sum_{e=uv \in E} w(e)(x_u + x_v - 2x_u x_v)$. Pruebe que si (x, z) es solución factible de (PL) entonces $2F(x) \geq \sum_{e \in E} w(e) z_e$.

(iv).- (1.0 pts) Sea (x, z) una solución factible de (PL). Muestre como obtener una nueva solución factible (x', z) de (PL) tal que x' tenga más coordenadas integrales que x.

(v).- (1.5 pts) Diseñe un algoritmo a tiempo polinomial que dada la instancia (G, w, k) encuentra un $U \subseteq V(G)$ que es una 2-aproximación de $OPT(G, w, k)$.