Ma4701 Optimización Combinatorial	**6 de Enero 2012**

Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: A. Fielbaum, D. Salas*

TIEMPO: 4.5 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (3.0 pts) Un *recubridor de arcos* de un grafo $G = (V, E)$ (sin nodos aislados) es un subconjunto $F \subseteq E$ de arcos tal que cada nodo de G es extremo de algún arco en F. Demuestre que el tamaño mínimo de un recubridor de arcos de G es $|V| - \nu(G)$, donde $\nu(G)$ denota la cardinalidad del matching de tamaño máximo de G. De un algoritmo que, dado un grafo G, encuentra un recubridor de arcos de G de cardinalidad mínima. Indique el tiempo que toma su algoritmo.

(ii).- (3.0 pts) Recuerde que para $G = (V, E)$ grafo y $\mathcal{C}$ circuito de G, se define el grafo $G' = (V', E')$ sobre el conjunto de nodos $(V \setminus V(\mathcal{C})) \cup \{\mathcal{C}\}$ tal que e' es un arco de G' si: (1) e' es un arco de E que no tiene extremos en $V(\mathcal{C})$, o (2) $e' = u\mathcal{C}$ y existe un nodo $v \in V(\mathcal{C})$ tal que $uv \in E$.

Rehaga la demostración vista en clases (o encuentre una alternativa) del siguiente resultado:

Proposition 1 *Sea $\mathcal{C}$ un circuito de largo impar del grafo G y sea M' un matching de G'. Entonces, existe un matching M de G para el cual $E(M) \subseteq E(M') \cup E(\mathcal{C})$ y el número de nodos M-expuestos de G es el mismo que el número de nodos M'-expuestos en G'.*

PROBLEMA 2: Sean $c = (c_e)_{e \in E} \in \mathbb{R}^{|E|}$, $f = (f_e)_{e \in E} \in \mathbb{R}^{|E|}$, y $w = (w_e)_{e \in E} \in \mathbb{Z}^{|E|}$ tal que

$$w_e = \begin{cases} +1\,, & \text{si } t(e) = s, \\ -1\,, & \text{si } h(e) = s, \\ 0\,, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Considere la siguiente formulación del problema del (s, t)-flujo máximo en el digrafo G.

$$\begin{aligned} (PL) \qquad & \max \sum_{e \in E} w_e f_e \\ & \text{s.a.} \quad 0 \le f_e \le c_e\,, \quad \forall e \in E, \\ & \sum_{e \in E : t(e) = v} f_e = \sum_{e \in E : h(e) = v} f_e\,, \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}. \end{aligned}$$

(i).- (2.0 pts) Determine la matriz $M \in \{-1, 0, +1\}^{|(|V|-2) \times |E|}$ tal que (PL) se escribe como

$$(PL') \qquad \max w^T f \quad \text{s.a.} \quad 0 \le f \le c\,,\ Mf = 0\,.$$

Establezca que M es totalmente unimodular y concluya que si $c \in \mathbb{Z}^{|E|}$, entonces existe un (s, t)-flujo integral óptimo solución de (PL).

(ii).- (1.5 pts) El dual de (PL') es

$$(D') \qquad \min y^T c \quad \text{s.a.} \quad y \geq 0\,,\; y + M^T z \geq w\,.$$

Pruebe que (D') también tiene soluciones integrales óptimas.

(iii).- (2.5 pts) Sean f^* e (y^*, z^*) soluciones óptimas de (PL') y (D') respectivamente. Asóciele un corte a z^* y pruebe que su capacidad es igual al flujo neto en s generado por f^*, i.e. derive el Teorema de Flujo-máximo/corte-mínimo.

Problema 3: Considere el siguiente

$$(PLE) \qquad \max c^T x \quad \text{s.a.} \quad Ax \leq b\,,\; x \in \{0,1\}^n\,.$$

Sea $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \leq \beta$ una desigualdad válida para (PLE). Multiplicando variables por -1 podemos asumir que los α_j son no-negativos. Sea $1 \leq k \leq n$ un índice fijo y considere el siguiente *lifting de la variable* x_k:

$$\begin{aligned}
(L) \qquad \delta_k \overset{\text{def}}{=} \beta - \max & \sum_{j \neq k} \alpha_j x_j \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{j \neq k} a_{ij} x_j \leq b_i - a_{ik}\,, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m, \\
& x_j \in \{0,1\}\,, \quad \forall j \neq k\,.
\end{aligned}$$

(i).- (3.0 pts) Pruebe que si (L) es infactible, entonces para cualquier solución factible x de (PLE) se debe tener que $x_k = 0$. En caso contrario, la desigualdad $\alpha'_k x_k + \sum_{j \neq k} \alpha_j x_j \leq \beta$ es válida para (PLE) cualquiera sea $\alpha'_k \leq \delta_k$.

(ii).- (3.0 pts) Considere

$$7x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 + 5x_6 \leq 8\,, \qquad x_i \in \{0,1\},\; i = 1, \ldots, 6\,,$$

y la desigualdad válida $x_2 + x_3 + x_5 \leq 2$. Determine la mejor desigualdad válida que pueda vía un lifting de la variable x_1.