Ma4701 Optimización Combinatorial	26 de Noviembre, 2008

Control No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: A. Fielbaum, D. Salas*

Tiempo: 4.5 hrs.

Problema 1: Considere el siguiente problema del Min-max Árbol Generador (MinMaxAG):

Algorithm 1: MinMaxAG

input : $G = (V, E)$ grafo, $\omega : E \to \mathbb{R}$.
output: T árbol generador de G que minimiza $\max_{e \in E(T)} \omega(e)$.

(i).- (2.0 pts) Pruebe que si T es un árbol generador de peso mínimo del grafo $G = (V, E)$ con función de peso $\omega : E \to \mathbb{R}$, entonces T es una solución óptima de MinMaxAG en la instancia (G, ω).

Indicación: Argumentos de la prueba de correctitud del algoritmo de Kruskal pueden serle útil.

(ii).- (1.5 pts) Sea T^* una solución óptima de MinMaxAG en la instancia (G, ω). Se define $E(e) = \{f \in E(G) : \omega(f) \le \omega(e)\}$. Pruebe que

$$\max\{\omega(e) : e \in E(T^*)\} = \min\{\omega(e) : E(e) \text{ contiene un AG de } G\} .$$

(iii).- (1.0 pts) Considere ahora el siguiente problema del Min-max Camino Mínimo (MinMaxCM):

Algorithm 2: MinMaxCM

input : $G = (V, E)$ digrafo, $c : E \to \mathbb{R}$, $s, t \in V$.
output: P un (s, t)-dicamino en G que minimiza $\max_{e \in E(P)} c(e)$.

A través de un contraejemplo, establezca que si P es un (s, t)-dicamino de costo mínimo en el digrafo $G = (V, E)$ con función de costo $c : E \to \mathbb{R}$, no necesariamente se tiene que P es una solución óptima de MinMaxCM en la instancia (G, c, s, t).

(iv).- (1.5 pts) De un algoritmo para resolver el problema MinMaxCM, establezca su correctitud, e indique su tiempo de ejecución (justifique).

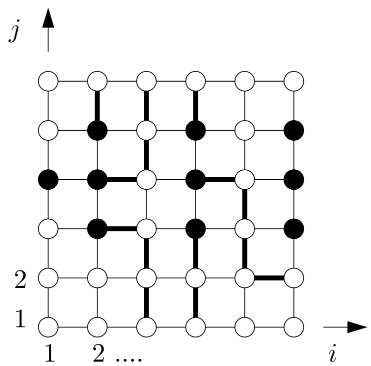
Problema 2:

(i).- (3.0 pts) El problema del Escape consiste en dados m nodos en una grilla de $n \times n$, decidir si existen m caminos nodo disjuntos en la grilla que conecten cada uno de los m nodos dados a un nodo del borde de la grilla. Formalmente, el problema se define como sigue (ver ilustración):

Algorithm 3: Escape

input : $n \in \mathbb{N}$ y m nodos distintos $(i_1, j_1), \ldots, (i_m, j_m)$ en la grilla de $n \times n$.

output: FACTIBLE si existen $P_1, \ldots, P_m$ caminos nodo disjuntos en la grilla de $n \times n$ donde para todo $t \in [m]$ el camino P_t va de (i_t, j_t) a algún nodo del borde de la grilla.
INFACTIBLE en caso contrario.



De un algoritmo para resolver el problema del Escape, establezca su correctitud, e indique el tiempo que toma (justifique).

(ii).- Sea $G = (V, E)$ una red de flujo con fuente y sumidero s y t, respectivamente. Sea $c : E \to \mathbb{R}_+$ una función de capacidad. Sea $x : E \to \mathbb{R}$. En lo que sigue, conviene extender c y x de manera que $x_{wv} = c_{wv} = 0$ si $vw \in E$ y $wv \notin E$. Si $0 \leq x \leq c$ definimos el digrafo auxiliar $G(x)$ como si x fuese un flujo factible, pero ignorando los arcos paralelos.[1] Llamamos capacidad residual del arco $vw \in E(G(x))$ a $\tilde{c}_{vw} = c_{vw} - x_{vw} + x_{wv}$. Decimos que x es un preflujo si para todo $v \in V \setminus \{s, t\}$,

$$f_x(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e:head(e)=v} x_e - \sum_{e:tail(e)=v} x_e \geq 0\,.$$

Si ademas $0 \leq x_e \leq c_e$ para todo $e \in E$, decimos que x es preflujo factible.

(ii.1).- (1.5 pts) Pruebe que si para $vw \in E(G(x))$ se tiene que $\tilde{c}_{vw} > 0$ y $f_x(v) > 0$, entonces al empujar $\epsilon = \min\{\tilde{c}_{vw}, f_x(v)\}$ unidades de flujo de v a w se obtiene un nuevo preflujo factible.[2]

(ii.2).- (1.5 pts) Decimos que $h : V \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ es una función de altura para el preflujo x si $h(s) = |V|$, $h(t) = 0$, y $h(v) \leq h(w) + 1$ para todo $vw \in E(G(x))$. Pruebe que si x es un preflujo factible y h es una función de altura para x, entonces existe un (s, t)-corte $\delta(R)$ tal que $x_{vw} = c_{vw}$ para todo $vw \in \delta(R)$ y $x_{vw} = 0$ para todo $vw \in \delta(\overline{R})$. Concluya que si x es además flujo, entonces es un flujo máximo.[3]

<u>Indicación</u>: Observe que existe un k, $0 < k < |V|$ tal que $h(v) \neq k$ para todo $v \in V$. Particione V de acuerdo a la altura h y al valor de k.

[1] Es decir agregamos vw a $E(G(x))$ si y solo si $x_{wv} > 0$ o $x_{vw} < c_{vw}$.

[2] Hay una ambiguedad si vw y wv son arcos de G. En este caso, para empujar se decrece el valor de x_{wv} tanto como sea posible, i.e. en $\min\{\epsilon, x_{wv}\}$, y se incrementa x_{vw} en $\epsilon - \min\{\epsilon, x_{wv}\}$.

[3] Muchos de los algoritmos más eficientes para resolver el problema del Flujo Máximo consisten justamente en encontrar un flujo y una función de altura para dicho flujo, lo anterior vía la construcción secuencial de una secuencia de preflujos y de candidatos a funciones de altura.