Grafos: Definiciones Básicas

Profesor: Marcos Kiwi

12 de Octubre, 2011.

Definición de grafo y convenciones básicas

Definición: [Grafo]

Es una tupla $G = (V, E)$ donde cada $e \in E$ está asociado a un conjunto $\{u, v\}$ con $u, v \in V$, $u \neq v$, o a un conjunto $\{u\}$ con $u \in V$.

Definición de grafo y convenciones básicas

Definición: [Grafo]

Es una tupla $G = (V, E)$ donde cada $e \in E$ está asociado a un conjunto $\{u, v\}$ con $u, v \in V$, $u \neq v$, o a un conjunto $\{u\}$ con $u \in V$.

Convenciones básicas:

Definición de grafo y convenciones básicas

Definición: [Grafo]

Es una tupla $G = (V, E)$ donde cada $e \in E$ está asociado a un conjunto $\{u, v\}$ con $u, v \in V$, $u \neq v$, o a un conjunto $\{u\}$ con $u \in V$.

Convenciones básicas:

- Asumimos (siempre) que V y E son conjuntos finitos.

Definición de grafo y convenciones básicas

Definición: [Grafo]

Es una tupla $G = (V, E)$ donde cada $e \in E$ está asociado a un conjunto $\{u, v\}$ con $u, v \in V$, $u \neq v$, o a un conjunto $\{u\}$ con $u \in V$.

Convenciones básicas:

- Asumimos (siempre) que V y E son conjuntos finitos.
- Tácitamente asumimos (siempre) que $V \cap E = \emptyset$.

Definición de grafo y convenciones básicas

Definición: [Grafo]

Es una tupla $G = (V, E)$ donde cada $e \in E$ está asociado a un conjunto $\{u, v\}$ con $u, v \in V$, $u \neq v$, o a un conjunto $\{u\}$ con $u \in V$.

Convenciones básicas:

- Asumimos (siempre) que V y E son conjuntos finitos.
- Tácitamente asumimos (siempre) que $V \cap E = \emptyset$.
- Los elementos de V se llaman *nodos* de G.

Definición de grafo y convenciones básicas

Definición: [Grafo]

Es una tupla $G = (V, E)$ donde cada $e \in E$ está asociado a un conjunto $\{u, v\}$ con $u, v \in V$, $u \neq v$, o a un conjunto $\{u\}$ con $u \in V$.

Convenciones básicas:

- Asumimos (siempre) que V y E son conjuntos finitos.
- Tácitamente asumimos (siempre) que $V \cap E = \emptyset$.
- Los elementos de V se llaman *nodos* de G.
- Los elementos de E se llaman *arcos* de G.

Definición de grafo y convenciones básicas

Definición: [Grafo]

Es una tupla $G = (V, E)$ donde cada $e \in E$ está asociado a un conjunto $\{u, v\}$ con $u, v \in V$, $u \neq v$, o a un conjunto $\{u\}$ con $u \in V$.

Convenciones básicas:

- Asumimos (siempre) que V y E son conjuntos finitos.
- Tácitamente asumimos (siempre) que $V \cap E = \emptyset$.
- Los elementos de V se llaman *nodos* de G.
- Los elementos de E se llaman *arcos* de G.
- Al conjunto V lo denotamos $V(G)$.

Definición de grafo y convenciones básicas

Definición: [Grafo]

Es una tupla $G = (V, E)$ donde cada $e \in E$ está asociado a un conjunto $\{u, v\}$ con $u, v \in V$, $u \neq v$, o a un conjunto $\{u\}$ con $u \in V$.

Convenciones básicas:

- Asumimos (siempre) que V y E son conjuntos finitos.
- Tácitamente asumimos (siempre) que $V \cap E = \emptyset$.
- Los elementos de V se llaman *nodos* de G.
- Los elementos de E se llaman *arcos* de G.
- Al conjunto V lo denotamos $V(G)$.
- Al conjunto E lo denotamos $E(G)$.

Definición de grafo y convenciones básicas

Definición: [Grafo]

Es una tupla $G = (V, E)$ donde cada $e \in E$ está asociado a un conjunto $\{u, v\}$ con $u, v \in V$, $u \neq v$, o a un conjunto $\{u\}$ con $u \in V$.

Convenciones básicas:

- Asumimos (siempre) que V y E son conjuntos finitos.
- Tácitamente asumimos (siempre) que $V \cap E = \emptyset$.
- Los elementos de V se llaman *nodos* de G.
- Los elementos de E se llaman *arcos* de G.
- Al conjunto V lo denotamos $V(G)$.
- Al conjunto E lo denotamos $E(G)$.
- Solemos denotar la cardinalidad de V por n, y la de E por m.

Definiciones complementarias

Definiciones complementarias

- Si $e \in E$ está asociada a $\{u, v\}$, $u, v \in V$, $u \neq v$ (respectivamente $\{u\}$, $u \in V$) decimos que u y v son (respectivamente u es) *extremo(s)* de e, y que e es *incidente* en u, v (respectivamente u).

Definiciones complementarias

- Si $e \in E$ está asociada a $\{u, v\}$, $u, v \in V$, $u \neq v$ (respectivamente $\{u\}$, $u \in V$) decimos que u y v son (respectivamente u es) *extremo(s)* de e, y que e es *incidente* en u, v (respectivamente u).
- Si $e \in E$ está asociado a $\{u, v\}$ decimos que u y v son *vecinos*, o *adyacentes*, o que están *asociados*.

Definiciones complementarias

- Si $e \in E$ está asociada a $\{u, v\}$, $u, v \in V$, $u \neq v$ (respectivamente $\{u\}$, $u \in V$) decimos que u y v son (respectivamente u es) *extremo(s)* de e, y que e es *incidente* en u, v (respectivamente u).
- Si $e \in E$ está asociado a $\{u, v\}$ decimos que u y v son *vecinos*, o *adyacentes*, o que están *asociados*.
- Decimos que dos arcos son *adyacentes* si tienen un extremo en común.

Definiciones complementarias

- Si $e \in E$ está asociada a $\{u, v\}$, $u, v \in V$, $u \neq v$ (respectivamente $\{u\}$, $u \in V$) decimos que u y v son (respectivamente u es) *extremo(s)* de e, y que e es *incidente* en u, v (respectivamente u).
- Si $e \in E$ está asociado a $\{u, v\}$ decimos que u y v son *vecinos*, o *adyacentes*, o que están *asociados*.
- Decimos que dos arcos son *adyacentes* si tienen un extremo en común.
- Si $e \in E$ está asociada a $\{u\}$ con $u \in V$, decimos que e es un *búcle*.

Definiciones complementarias

- Si $e \in E$ está asociada a $\{u, v\}$, $u, v \in V$, $u \neq v$ (respectivamente $\{u\}$, $u \in V$) decimos que u y v son (respectivamente u es) *extremo(s)* de e, y que e es *incidente* en u, v (respectivamente u).
- Si $e \in E$ está asociado a $\{u, v\}$ decimos que u y v son *vecinos*, o *adyacentes*, o que están *asociados*.
- Decimos que dos arcos son *adyacentes* si tienen un extremo en común.
- Si $e \in E$ está asociada a $\{u\}$ con $u \in V$, decimos que e es un *búcle*.
- Decimos que $e, f \in E$ son *arcos paralelos* si sus extremos son iguales.

Definiciones complementarias

- Si $e \in E$ está asociada a $\{u, v\}$, $u, v \in V$, $u \neq v$ (respectivamente $\{u\}$, $u \in V$) decimos que u y v son (respectivamente u es) *extremo(s)* de e, y que e es *incidente* en u, v (respectivamente u).
- Si $e \in E$ está asociado a $\{u, v\}$ decimos que u y v son *vecinos*, o *adyacentes*, o que están *asociados*.
- Decimos que dos arcos son *adyacentes* si tienen un extremo en común.
- Si $e \in E$ está asociada a $\{u\}$ con $u \in V$, decimos que e es un *búcle*.
- Decimos que $e, f \in E$ son *arcos paralelos* si sus extremos son iguales.
- Decimos que G es *simple* si no tiene arcos paralelos ni búcles.

Convenciones complementarias

Convenciones complementarias

- Salvo que se diga lo contrario, cuando decimos grafos, nos referimos a grafos simples.

Convenciones complementarias

- Salvo que se diga lo contrario, cuando decimos grafos, nos referimos a grafos simples.
- Si u y v son los extremos de e escribimos $e = uv$ o $e = vu$ (Nota: En rigor, esto es un abuso de notación salvo que G sea simple).

Convenciones complementarias

- Salvo que se diga lo contrario, cuando decimos grafos, nos referimos a grafos simples.
- Si u y v son los extremos de e escribimos $e = uv$ o $e = vu$ (Nota: En rigor, esto es un abuso de notación salvo que G sea simple).
- Tácitamente, consideramos los arcos E de un grafo G como un multi-conjunto cuyos elementos son subconjuntos no vacíos de cardinal 1 o 2 de $V(G)$. Si G no tiene arcos paralelos, entonces el multi-conjunto es en realidad un conjunto. Si G no tiene búcles, entonces el multi-conjunto solamente contiene elementos de cardinal 2.

Subgrafos y álgebra de grafos

Definiciones: Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ (multi)grafos.

Subgrafos y álgebra de grafos

Definiciones: Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ (multi)grafos.

- Definimos $G \cup G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cup V', E \cup E')$.

Subgrafos y álgebra de grafos

Definiciones: Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ (multi)grafos.

- Definimos $G \cup G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cup V', E \cup E')$.
- Definimos $G \cap G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cap V', E \cap E')$.

Subgrafos y álgebra de grafos

Definiciones: Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ (multi)grafos.

- Definimos $G \cup G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cup V', E \cup E')$.
- Definimos $G \cap G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cap V', E \cap E')$.
- Decimos que G y G' son *disjuntos* si $V \cap V' = \emptyset$.

Subgrafos y álgebra de grafos

Definiciones: Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ (multi)grafos.

- Definimos $G \cup G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cup V', E \cup E')$.
- Definimos $G \cap G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cap V', E \cap E')$.
- Decimos que G y G' son *disjuntos* si $V \cap V' = \emptyset$.
- Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, decimos que G' es *subgrafo* de G (y que G es *supergrafo* de G'), denotado $G' \subseteq G$.

Subgrafos y álgebra de grafos

Definiciones: Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ (multi)grafos.

- Definimos $G \cup G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cup V', E \cup E')$.
- Definimos $G \cap G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cap V', E \cap E')$.
- Decimos que G y G' son *disjuntos* si $V \cap V' = \emptyset$.
- Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, decimos que G' es *subgrafo* de G (y que G es *supergrafo* de G'), denotado $G' \subseteq G$.
- Si $G' \subseteq G$ y G' contiene todos los arcos en E con extremos en V', decimos que G' es un *grafo inducido* de G, que V' *induce* G' en G, y lo denotamos $G = G|_{V'}$ (o $G = G[V']$).

Subgrafos y álgebra de grafos

Definiciones: Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ (multi)grafos.

- Definimos $G \cup G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cup V', E \cup E')$.
- Definimos $G \cap G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cap V', E \cap E')$.
- Decimos que G y G' son *disjuntos* si $V \cap V' = \emptyset$.
- Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, decimos que G' es *subgrafo* de G (y que G es *supergrafo* de G'), denotado $G' \subseteq G$.
- Si $G' \subseteq G$ y G' contiene todos los arcos en E con extremos en V', decimos que G' es un *grafo inducido* de G, que V' *induce* G' en G, y lo denotamos $G = G|_{V'}$ (o $G = G[V']$).
- Decimos que $G' \subseteq G$ *genera* o *abarca* G si $V' = V$.

Subgrafos y álgebra de grafos

Definiciones: Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ (multi)grafos.

- Definimos $G \cup G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cup V', E \cup E')$.
- Definimos $G \cap G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cap V', E \cap E')$.
- Decimos que G y G' son *disjuntos* si $V \cap V' = \emptyset$.
- Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, decimos que G' es *subgrafo* de G (y que G es *supergrafo* de G'), denotado $G' \subseteq G$.
- Si $G' \subseteq G$ y G' contiene todos los arcos en E con extremos en V', decimos que G' es un *grafo inducido* de G, que V' *induce* G' en G, y lo denotamos $G = G|_{V'}$ (o $G = G[V']$).
- Decimos que $G' \subseteq G$ *genera* o *abarca* G si $V' = V$.

Convención:

Subgrafos y álgebra de grafos

Definiciones: Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ (multi)grafos.

- Definimos $G \cup G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cup V', E \cup E')$.
- Definimos $G \cap G' \stackrel{\text{def}}{=} (V \cap V', E \cap E')$.
- Decimos que G y G' son *disjuntos* si $V \cap V' = \emptyset$.
- Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, decimos que G' es *subgrafo* de G (y que G es *supergrafo* de G'), denotado $G' \subseteq G$.
- Si $G' \subseteq G$ y G' contiene todos los arcos en E con extremos en V', decimos que G' es un *grafo inducido* de G, que V' *induce* G' en G, y lo denotamos $G = G|_{V'}$ (o $G = G[V']$).
- Decimos que $G' \subseteq G$ *genera* o *abarca* G si $V' = V$.

Convención:

- Si $U \subseteq V$, entonces $G[U]$ (o $G|_U$) denota el grafo inducido por U en G.

Caminos y circuitos

Definiciones: Sea $G = (V, E)$ (multi)grafo.

Caminos y circuitos

Definiciones: Sea $G = (V, E)$ (multi)grafo.

- Un *camino* P en G es una secuencia de arcos $e_1 e_2 \dots e_n$ tal que $e_i = v_{i-1} v_i \in E$. Los nodos v_0 y v_n se llaman *extremos* del camino, y se dice que P *conecta* v_0 y v_n (o que *va* de v_0 a v_n, o viceversa). A n se le llama el *largo* del camino P y se denota $||P||$ (o $\ell(P)$).

Caminos y circuitos

Definiciones: Sea $G = (V, E)$ (multi)grafo.

- Un *camino* P en G es una secuencia de arcos $e_1 e_2 \dots e_n$ tal que $e_i = v_{i-1}v_i \in E$. Los nodos v_0 y v_n se llaman *extremos* del camino, y se dice que P *conecta* v_0 y v_n (o que *va* de v_0 a v_n, o viceversa). A n se le llama el *largo* del camino P y se denota $||P||$ (o $\ell(P)$).
- Un camino $P = e_1 e_2 \dots e_n$ de G se dice *simple* si cada nodo de G es extremo de a lo más 2 de los arcos e_i, $i = 0, \dots, n-1$.

Caminos y circuitos

Definiciones: Sea $G = (V, E)$ (multi)grafo.

- Un *camino* P en G es una secuencia de arcos $e_1 e_2 \ldots e_n$ tal que $e_i = v_{i-1} v_i \in E$. Los nodos v_0 y v_n se llaman *extremos* del camino, y se dice que P *conecta* v_0 y v_n (o que *va* de v_0 a v_n, o viceversa). A n se le llama el *largo* del camino P y se denota $||P||$ (o $\ell(P)$).
- Un camino $P = e_1 e_2 \ldots e_n$ de G se dice *simple* si cada nodo de G es extremo de a lo más 2 de los arcos e_i, $i = 0, \ldots, n-1$.
- Un *circuito* (o *cíclo*) C en G es una secuencia de arcos $e_0 e_2 \ldots e_{n-1}$ tal que $e_i = v_i v_{(i+1) \bmod n} \in E$. A n se le llama el *largo* del circuito C y se denota $||C||$ (o $\ell(C)$).

Caminos y circuitos

Definiciones: Sea $G = (V, E)$ (multi)grafo.

- Un *camino* P en G es una secuencia de arcos $e_1 e_2 \dots e_n$ tal que $e_i = v_{i-1}v_i \in E$. Los nodos v_0 y v_n se llaman *extremos* del camino, y se dice que P *conecta* v_0 y v_n (o que *va* de v_0 a v_n, o viceversa). A n se le llama el *largo* del camino P y se denota $||P||$ (o $\ell(P)$).
- Un camino $P = e_1 e_2 \dots e_n$ de G se dice *simple* si cada nodo de G es extremo de a lo más 2 de los arcos e_i, $i = 0, \dots, n-1$.
- Un *circuito* (o *cíclo*) C en G es una secuencia de arcos $e_0 e_2 \dots e_{n-1}$ tal que $e_i = v_i v_{(i+1) \bmod n} \in E$. A n se le llama el *largo* del circuito C y se denota $||C||$ (o $\ell(C)$).
- Un circuito $P = e_1 e_2 \dots e_n$ de G se dice *simple* si cada nodo de G es extremo de a lo más 2 de los arcos e_i, $i = 0, \dots, n-1$.

Convenciones:

Convenciones:

- Frecuentemente nos referimos a un camino $P = (\{v_i\}_{i=0}^{n}, \{v_i, v_{i+1}\}_{i=0}^{n-1})$ por la secuencia de sus vértices, i.e. $P = v_0 v_1 \cdots v_n$. En particular, un nodo v_0 por si solo es un camino de largo 0 que va de v_0 a v_0.

Convenciones:

- Frecuentemente nos referimos a un camino $P = (\{v_i\}_{i=0}^{n}, \{v_i, v_{i+1}\}_{i=0}^{n-1})$ por la secuencia de sus vértices, i.e. $P = v_0 v_1 \cdots v_n$. En particular, un nodo v_0 por si solo es un camino de largo 0 que va de v_0 a v_0.
- Adoptamos la misma convención anterior para los circuitos.

Grafos dirigidos

- Un *digrafo* (o *grafo dirigido*) es una tupla $G = (V, E)$ de conjuntos disjuntos (de *vértices* y *arcos*) junto con dos mapas $t : E \to V$ y $h : E \to V$ que le asocian a cada arco e un *vértice inicial* (o *cola*) $t(e)$, y un *vértice final* (o *cabeza*) $h(e)$. Se dice que e *va* (o *está dirigida*) de $t(e)$ a $h(e)$. Si dos arcos $e, f \in E$ están dirigidos entre los mismos vértices $u, v \in V$ se dicen *paralelos*. Si $t(e) = h(e)$ se dice que e es un *búcle*. Etc, etc ...

Notación

Sea $G = (V, E)$ un (multi)grafo.

Notación

Sea $G = (V, E)$ un (multi)grafo.

- Si $U \subseteq V$, escribimos $G - U$ por $G|_{V \setminus U}$. Si $U = \{u\}$ es un singleton, escribimos $G - u$ en vez de $G \setminus \{u\}$. Si G' es otro (multi)grafo, escribimos $G - G'$ en vez de $G - V(G')$.

Notación

Sea $G = (V, E)$ un (multi)grafo.

- Si $U \subseteq V$, escribimos $G - U$ por $G|_{V \setminus U}$. Si $U = \{u\}$ es un singleton, escribimos $G - u$ en vez de $G \setminus \{u\}$. Si G' es otro (multi)grafo, escribimos $G - G'$ en vez de $G - V(G')$.
- Si F es un multi-conjunto cuyos elementos son subconjuntos de cardinal 1 o 2 de V, escribimos $G - F$ en vez de $(V, E \setminus F)$, y $G + F$ en vez de $(V, E \cup F)$. Además, abreviamos $G - \{e\}$ y $G + \{e\}$ por $G - e$ y $G + e$, respectivamente.