Ma47a Optimización Combinatorial **10 de Junio, 2006**

Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: G. Sanchez*

Tiempo: 5.0 hrs.

Problema 1:

(i).- (3.0 pts) Sea $P \subseteq \{x : x \geq 0\}$ un poliedro no vacio. Pruebe que P es puntiagudo.

(ii).- Sea el conjunto de vectores P' que satisfacen *todos* los cortes de Gomory-Chvátal para el poliedro P de la Figura 1.

(ii.1).- (1.0 pts) Exprese P en la forma $\{x : Ax \leq b\}$.

(ii.2).- (1.0 pts) Determine todos los vectores $0 \leq y < 1$ tales que $y^T A$ es integral.

(ii.3).- (1.0 pts) Determine y dibuje P'.

Indicación: Recuerde que todo corte de Gomory-Chvátal para P puede escribirse como una suma de una desigualdad de la forma $(y^T A)x \leq \lfloor y^T b \rfloor$ para $0 \leq y < 1$ e $y^T A$ integral y una combinación lineal de desigualdades del sistema $Ax \leq b$.

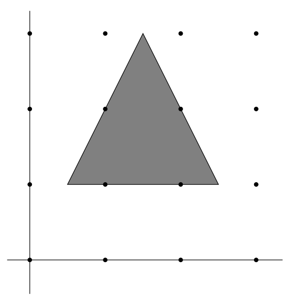

Figura 1: Poliedro P.

Problema 2: Sean n actividades entre las que podemos elegir. La i–ésima comienza en el instante t_i y termina en u_i (o más precisamente justo antes de u_i). Si se selecciona la i-ésima actividad, se obtiene un beneficio de p_i. El objetivo es elegir un conjunto de actividades que no se traslapan de manera de maximizar el beneficio total (i.e. la suma de los beneficios de las actividades seleccionadas).

Sea x_i una variable que representa si la actividad i fue elegida ($x_i = 1$) o no ($x_i = 0$).

(i).- (3.0 pts) Pruebe que el siguiente PL entero permite resolver el problema planteado, pero su relajación puede tener vértices no integrales.

$$
\begin{array}{lrcll}
(L) & \text{máx} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i & & & \\
 & x_i + x_j & \leq & 1\,, & \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}, \text{ si } [t_i,u_i) \cap [t_j,u_j) \neq \emptyset, \\
 & x_i & \in & \{0,1\}\,, & \forall i \in \{1,\ldots,n\}.
\end{array}
$$

(ii).- (3.0 pts) Pruebe que el siguiente PL entero también permite resolver el problema planteado,

$$
\begin{array}{lrcll}
(L') & \text{máx} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i & & & \\
& \displaystyle\sum_{j: t_i \in [t_j, u_j)} x_j & \leq & 1\,, & \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \\
& x_i & \in & \{0,1\}\,, & \forall i \in \{1, \ldots, n\}.
\end{array}
$$

Muestre que la matriz A asociada a (L') recién formulado es totalmente unimodular. Sigue que la relajación de (L') dada por $\text{máx}\left\{p^T x \,:\, Ax \leq b; 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\right\}$ entrega la solución buscada.

Indicación: Ordene las filas de A de acuerdo al valor de t_i que las define y verifique que A tiene la propiedad de los "1's consecutivos".

Problema 3: Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y sea P el polítopo definido por las desigualdades

$$
\begin{array}{lrcll}
(L) & x_u + x_v & \leq & 1\,, & \forall uv \in E, \\
& x_v & \geq & 0\,, & \forall v \in V.
\end{array}
$$

Sea $\overline{x}$ un vector indicatriz en P. El conjunto de nodos $v \in V$ tal que $\overline{x}_v = 1$ es un conjunto *estable* de G, i.e. no hay arcos entre los nodos de dicho conjunto. La envoltura convexa de los vectores indicactriz de conjuntos estables de G se llama *polítopo estable de* G y suele denotarse por $S(G)$. Claramente, $S(G) = P \cap \mathbb{Z}^{|V|}$.

Muestre por medio de una demostración de planos cortantes a partir de (L) que cada una de las siguientes clases de desigualdades es válida para $S(G)$.

(i).- (2.0 pts) $x(C) \leq (|C| - 1)/2$ donde $C \subseteq V$ es el conjunto de nodos de un circuito de largo impar.

(ii).- (2.0 pts) $2x_r + x(W \setminus \{r\}) \leq 2$ donde W es el conjunto de nodos de una 5-rueda de G con centro en r (ver Figura 2).

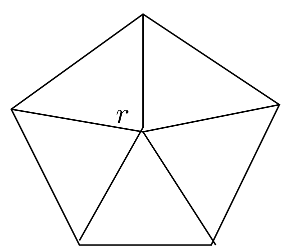

Figura 2: Una 5-rueda con centro r.

(iii).- (2.0 pts) $x(K) \leq 1$ donde $K \subseteq V$ es un clique ($uv \in E$ para todo $u, v \in K$).