MA-47A Optimización Combinatorial	**17 de Mayo, 2003**

Pauta Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: G. Espinoza*

Parte I.

(i.1).- Supongamos que $G = (L, R, E)$ y que $\omega \in \mathbb{R}^E$ es la función de peso. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $|L|, |R| \geq k$ pues de lo contrario no existe un k–cuplaje en G. Sean $L' = \{l'_1, \ldots, l'_{|R|-k}\}$ y $R' = \{r'_1, \ldots, r'_{|L|-k}\}$ conjuntos disjuntos entre si y con L y R. Definimos el grafo $G' = (L \cup L', R \cup R', E')$ tal que $vw \in E'$ si

- $vw \in E$, o
- $v \in L'$ y $w \in R$, o
- $v \in L$ y $w \in R'$.

Notar que G' es bipartido. Sea además la función de peso ω' definida sobre los arcos de G' por, $\omega'(e) = \omega(e)$ si $e \in E$ y $\omega'(e) = 0$ si $e \in E' \setminus E$.

Observar que todo cuplaje M en G puede ser extendido a un cuplaje perfecto M' en G' agregando por cada uno de los $(|L| - k)$ nodos M–expuesto en L, digamos $l_1, \ldots, l_{|L|-k}$, el arco $l_i r'_i$. Idéntico procedimiento se puede hacer con los nodos M–expuestos en R. Vía este procedimiento se obtiene un cuplaje perfecto M' en G' tal que $\omega(M') = \omega(M)$.

Por otro lado, si M' es un cuplaje perfecto en G', entonces $M = M' \cap E$ es un k–cuplaje en G tal que $\omega(M) = \omega'(M')$.

Para realizar la reducción implícita en el argumento anterior sólo se requiere construir G' dado G. Esto consiste en verificar que $|L|, |R| \leq k$, agregar $(|L| + |R| - 2k)$ nodos a G, e insertar $(|L| - k)|L| + (|R| - k)|R|$ arcos, i.e., toma $O(|V(G)|^2)$ (independiente de si G se representa vía listas o matrices de adyacencia).

(i.2).- Supongamos que $G = (L, R, E)$ y que $\omega \in \mathbb{R}^E$ es la función de peso. Definimos el digrafo $G' = (L \cup \{l^*\}, R \cup \{r^*\}, E')$ tal que $r^* l^* \in E'$, $lr \in E'$ para todo $lr \in E$, $l^* l \in E'$ para todo $l \in L$, y $rr^* \in E'$ para todo $r \in R$. Sea además la función de costo c' definida sobre los arcos de G' por $c'(e) = \omega(e)$ si $e \in E$ y $\omega(e) = 0$ si $e \in E' \setminus E$. Por último, definimos las funciones de capacidad inferior y superior $l : E' \to \mathbb{R}$ y $u : E' \to \mathbb{R}$ por

- Si $e \neq r^* l^*$, entonces $u(e) = 1$,
- Si $e \neq r^* l^*$, entonces $l(e) = 1$ si $t(e) = l^*$ o $h(e) = r^*$, y $l(e) = 0$ en caso contrario,
- $l(r^* l^*) = -\infty$, $u(r^* l^*) = +\infty$.

Aunque tedioso, no es difícil verificar que a un cuplaje perfecto M en G se le puede asociar una circulación factible x' en G' tal que $c'(x') = \omega(M)$, y viceversa.

Para realizar la reducción implícita en el argumento anterior sólo se requiere construir G' y c' dado G y ω. Esto puede hacerse en tiempo $O(|L|+|R|) = O(|V(G)|^2)$.

(ii).- Como $l(vw) \leq x(vw) \leq u(vw)$ sí y sólo si $x'(vw) = x(vw) \leq u(vw) = u'(vw)$ y $x'(wv) = -x(vw) \leq -l(vw) = u'(wv)$, sigue que x es factible sí y sólo si x' es factible.

Observar que, cualquiera sea $w \in V$,

$$\begin{aligned}\sum_{e'\in E':t(e')=w} x'(e) &= \sum_{e\in E:t(e)=w} x(e) - \sum_{e\in E:h(e)=w} x(e)\,,\\ \sum_{e'\in E':h(e')=w} x'(e) &= \sum_{e\in E:h(e)=w} x(e) - \sum_{e\in E:t(e)=w} x(e)\,.\end{aligned}$$

Luego, $f_{x'}(w) = 2f_x(w)$. Sigue que x' es circulación sí y sólo si x también lo es.

Por otro lado, si $vw \in E$, entonces $c'(vw)x'(vw) + c'(wv)x'(wv) = 2c(vw)x(vw)$. Por lo tanto,

$$2\sum_{e\in E} c(e)x(e) = \sum_{e'\in E'} c(e')x(e')\,.$$

Luego, x es circulación factible óptima en G sí y sólo si x' también lo es en G'.

(iii).- Claramente, para todo $vw \in E$,

$$c_d(vw) = c(vw) + d(v) - d(w) = -c(wv) - d(w) + d(v) = -c_d(wv)\,.$$

Además,

$$\sum_{e\in E} c_d(e)x(e) = \sum_{e\in E} c(e)x(e) + \sum_{v\in V} d(v) \sum_{vw\in E} x(vw) - \sum_{w\in V} d(w) \sum_{vw\in E} x(vw)\,.$$

Renombrando variables, obtenemos que, $\sum_{w\in V} d(w) \sum_{vw\in E} x(vw) = \sum_{v\in V} d(v) \sum_{wv\in E} x(wv)$. Luego,

$$\sum_{e\in E} c_d(e)x(e) = \sum_{e\in E} c(e)x(e) + \sum_{v\in V} f_x(v)\,.$$

Como x es circulación, se tiene que $f_x(v) = 0$ cualquiera sea $v \in V$, y la igualdad deseada sigue.

Finalmente, observar que si Γ es un dicircuito en G, entonces

$$c_d(\Gamma) = \sum_{e\in\Gamma} c(e) + \sum_{t(e):e\in\Gamma} d(t(e)) - \sum_{h(e):e\in\Gamma} d(h(e)) = c(\Gamma)\,,$$

puesto que como Γ es un dicircuito, entonces $\sum_{e\in\Gamma} d(t(e)) - \sum_{e\in\Gamma} d(h(e))$.

(iv).- Veamos que a implica b. Supongamos que no se cumple b, i.e., que existe un dicircuito Γ en G_x de costo negativo. Sigue que si $\delta(x) = \min\{u_x(e) : e \in \Gamma\}$ y para todo $vw \in E$,

$$x'(vw) = \begin{cases} x(vw) + \delta(x)\,, & \text{si } vw \in \Gamma\,,\\ x(vw) - \delta(x)\,, & \text{si } wv \in \Gamma\,,\\ x(vw)\,, & \text{si } vw \notin \Gamma\,,\end{cases}$$

entonces x' es una circulación antisimétrica factible en G de costo $c(x') = c(x) + 2\delta(x)c(\Gamma) < c(x)$, contradiciendo la optimalidad de x.

Supongamos ahora que se cumple b. Sea G' el grafo y c' la función de costos obtenidos a partir de G_x y c agregando un vértice s y arcos de costo 0 de s a todos los nodos de G_x. Sea $d(v)$ el costo mínimo de un camino de s a v en G_x con respecto a los costos dados por c'. Estas cantidades están bien definidas, pues por hipótesis G_x no posee dicircuitos de costo negativo con respecto a c (ni con respecto a c_d), y por lo tanto, G' tampoco los posee con respecto a c'. Por definición de caminos mínimos, $d(w) \leq d(v) + c(vw)$ para todo $vw \in E(G_x)$, i.e., $c_d(vw) \geq 0$ cualquiera sea $vw \in E(G_x)$. En otras palabras, se cumple c.

Si se cumple c, es obvio que se tiene d.

Por último, asumamos que d es cierta. Luego, cualquiera sea el dicircuito simple Γ en G_x, sigue que Γ es un dicircuito en G y por (iii) tendremos que

$$c(\Gamma) = c_d(\Gamma) > -\frac{|\Gamma|}{|V|} > -1\,.$$

Por integralidad de c, se debe tener que $c(\Gamma) \geq 0$. Sigue inmediatamente que no hay dicircuitos de costo negativo en G_x, i.e., se cumple b y por lo tanto también c. Tenemos entonces que existe un potencial, digamos p, tal que $c_p(e) \geq 0$ cualquiera sea $e \in G_x$. Supongamos, para efectos de obtener una contradicción que existe una circulación antisimétrica x^* tal que $c(x^*) < c(x)$. Definimos $x' \equiv x^* - x$ y notamos que x' es circulación antisimétrica factible en G_x de costo

$$c(x') = c_p(x') = \sum_{e\in E} c_p(e)x'(e) = 2 \sum_{e\in E: x'(e)>0} c_p(e)x'(e) \geq 0\,,$$

dado que $x'(e) > 0$ implica que e es un arco de G_x y que $c_p(e) \geq 0$. Esto contradice el hecho que $c(x') = c(x^*) - c(x) < 0$, i.e., debe cumplirse a.

(v).- Sea Γ un dicircuito cualquiera en G_x. Como c es integral, entonces $c(\Gamma) \in \mathbb{Z}$. Luego, si $c(\Gamma) < 0$, entonces $c(\Gamma) \leq -1$. Además, si x es circulación $\delta(x) \geq 1$ puesto que para todo $e \in G_x$ se tiene que $u_x(e) = u(e) - x(e) \in \mathbb{Z}$, $u(e) - x(e) > 0$.

Sea entonces x' definido como en el paso 4 del algoritmo de Klein y $c(\Gamma) < 0$ con Γ dicircuito en G, entonces

$$c(x') = c(x) + 2\delta(x)c(\Gamma) \leq c(x) - 2\,.$$

En otras palabras, en cada iteración del algoritmo de Klein el valor de la circulación decrece en al menos 1. Luego, el algoritmo termina en a lo más $O(|E| \cdot C \cdot U)$ iteraciones dado que cualquiera sea la circulación factible z, se tiene que

$$|c(z)| \leq \sum_{e\in E} |z(e)||c(e)| \leq |E| \cdot C \cdot U\,.$$

(vi).- Observar que si se toma $d \equiv 0$, entonces,

$$\sup_{d\in\mathbb{Z}^E} \min\{c_d(e)\,:\, e \in E(G_x)\} \geq \min\{c(e)\,:\, e \in E(G_x)\} \geq -C\,.$$

Sea entonces x'' la circulación obtenida por el algoritmo de Klein al cabo de $m = |V| \cdot \ln(|V| \cdot C)$ iteraciones. Sigue que,

$$\sup_{d'' \in \mathbb{Z}^E} \min\{c_{d''}(e) \,:\, e \in E(G_{x''})\} \geq -C \left(1 - \frac{1}{|V|}\right)^m .$$

Pero,

$$\left(1 - \frac{1}{|V|}\right)^m < e^{-m/|V|} = \frac{1}{|V|C} .$$

Luego, $\sup_{d'' \in \mathbb{Z}^E} \min\{c_{d''}(e) \,:\, e \in E(G_{x''})\} > -1/|V|$, i.e., existe un potencial $d'' : V \to \mathbb{Z}$ tal que $c_{d''}(e) > -1/|V|$, para todo $e \in E(G_{x''})$. De la parte (iv), se concluye que x'' debe ser óptima.