MA-47A Optimización Combinatorial	**7 de Julio, 2000**

Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: J. R. Correa*

TIEMPO: 3.5 HRS.

PROBLEMA 1:

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Se dice que $I \subseteq V$ es un conjunto independiente si para todo $u, v \in I$, se tiene que $(u, v) \notin E$. Denotaremos por $\alpha(G)$ el tamaño del conjunto independiente más grande de G. El problema del conjunto independiente consiste en, dado G, calcular $\alpha(G)$.

(i).- Pruebe que el problema de decisión asociado al problema del conjunto independiente da origen a un lenguaje, denotado $INDEP$, que es un lenguaje NP–completo.

Indicación: Haga una reducción desde $CLIQUE$.

(ii).- Pruebe que existe un algoritmo eficiente de $(d+1)$–aproximación para el problema del conjunto independiente en grafos de grado máximo $d \in \mathbb{N}$.

(iii).- Sea $K \in \mathbb{N}$. Diremos que existe un algoritmo polinomial de K-aproximación aditiva para el problema del conjunto independiente si existe una función

$$A:\{\langle G\rangle \ : G \text{ es un grafo no dirigido}\} \to \mathbb{N},$$

calculable en tiempo polinomial, tal que para todo G,

$$0 \ \leq \ \alpha(G) - A(\langle G\rangle) \quad \leq \quad K\,.$$

Pruebe que si existe un algoritmo polinomial de K–aproximación aditiva para el problema del conjunto independiente, entonces P = NP.

Indicación: Dado un grafo no dirigido G construya un grafo G' que consista en una cantidad adecuada de copias de G.

PROBLEMA 2:

(i).- Sea $G = (L, R, E)$ un grafo bipartito y $w{:}E \to \mathbb{R}$ una función de peso. Para $k \in \mathbb{N}$ denotamos por M_k un matching de peso mínimo en G de tamaño k.

A continuación estudiaremos una forma, más eficiente que el algoritmo que se vio en clases, de encontrar un matching de peso mínimo en G de tamaño k+1 dado M_k. Para ello, definamos G_k como el digrafo tal que $V(G_k) = L \cup R \cup \{s\}$, $s \notin L \cup R$ y $e = (u, v) \in E(G_k)$ si $u = s$ y $l \in L$ está M_k–expuesto, o $u \in L$, $v \in R$, y $(u, v) \in E(G) \setminus M_k$, o $u \in R$, $v \in L$, y $(u, v) \in M_k$. Sobre G_k definimos la función de peso $w_k{:}E(G_k) \to \mathbb{R}$ de forma que $w_k(s, l) = 0$ si $l \in L$ está M_k expuesto, $w_k(l, r) = w(l, r)$ si $l \in L$, $r \in R$ y $(l, r) \in E(G) \setminus M_k$, y $w_k(r, l) = -w(l, r)$ si $l \in L$, $r \in R$ y $(l, r) \in M_k$.

En clases se vio que si P_k era un camino en G_k de peso mínimo con respecto a w_k de s a un nodo en R M_k-expuesto, entonces $M_{k+1} = M_k \Delta(E \cap E(P_k))$ es un matching en G de peso mínimo con respecto a w de tamaño $k+1$.

Para $v \in V(G)$ y w una función de peso sobre los arcos de G, denotamos por $\delta_{G,w}(u,v)$ el peso mínimo de un camino en G de u a v. Definimos para $(u,v) \in E(G_k)$ la función de peso sobre G_k por

$$\bar{w}_k(u,v) \quad = \quad w_k(u,v) + \delta_{G_{k-1},w_{k-1}}(s,u) - \delta_{G_{k-1},w_{k-1}}(s,v)\,.$$

(i.1).- (1.0 pts) Pruebe que para todo $v \in V(G_k)$ se tiene que,

$$\delta_{G_k,w_k}(s,v) \quad = \quad \delta_{G_k,\bar{w}_k}(s,v) + \delta_{G_{k-1},w_{k-1}}(s,v)\,.$$

(i.2).- (1.5 pts) Suponiendo que $M_1, \ldots, M_{k-1}$ se obtuvieron en la forma descrita más arriba, pruebe que para todo $(u,v) \in E(G_k)$, se tiene que $\bar{w}_k(u,v) \geq 0$.

Indicación: Considere los casos $(u,v) \in E(G_{k-1})$ y $(u,v) \notin E(G_{k-1})$.

(i.3).- (0.5 pts) Proponga un algoritmo más eficiente que el visto en clases para determinar un matching de peso mínimo en G de tamaño k. Determine la complejidad de su algoritmo.

(ii).- (3.0 pts) Dado un grafo G y un conjunto de nodos $S \subseteq V(G)$ el conjunto de vecinos de S se denota por

$$\mathcal{N}(S) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \{v \in V(G) \,:\, \exists (u,v) \in E(G), u \in S\}\,.$$

Use conceptos/resultados de flujo–máximo para demostrar el siguiente:

Teorema 1 ***(de Hall)*** *Sea $G = (L,R,E)$ un grafo no dirigido bipartito tal que $|L| = |R|$. Entonces, existe un matching perfecto en G sí y sólo si $|\mathcal{N}(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq L$.*