MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **18 de Noviembre, 1999**

Resumen No. 4

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: E. Moreno, M. Saez*

1 Teoremas Limites

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean X y $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ variables aleatorias sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Proposición 1 **[Desigualdad de Markov]** *Si X es una variable aleatoria no–negativa, i.e., $\mathbb{P}(\{X \geq 0\}) = 1$, entonces para todo $t > 0$,*

$$\mathbb{P}(\{X \geq t\}) \quad \leq \quad \frac{\mathbb{E}(X)}{t} .$$

Proposición 2 **[Desigualdad de Chebyshev]** *Si X es una variable aleatoria de esperanza y varianza finita, entonces para todo $\epsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon\}) \quad \leq \quad \frac{1}{\epsilon^2} \mathbb{V}ar(X) .$$

Más aun, para todo $p > 0$,

$$\mathbb{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon\}) \quad \leq \quad \frac{1}{\epsilon^p} \mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^p) .$$

Proposición 3 *$\mathbb{V}ar(X) = 0$ sí y sólo si $\mathbb{P}(\{X = \mathbb{E}(X)\}) = 1$.*

Proposición 4 **[Desigualdad de Jensen]** *Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa, dos veces diferenciable, y $\mathbb{P}(\{X \in D\}) = 1$, entonces*

$$\mathbb{E}(f(X)) \quad \geq \quad f(\mathbb{E}(X)) ,$$

si las esperanzas existen y son finitas.

Teorema 1 **[Desigualdad de Kolmogorov]** *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que $\mathbb{E}(X_i) = 0$ y $\mathbb{V}ar(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces, para todo $a > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\max_{i=1,\ldots,n} |X_1 + \ldots + X_i| > a\right\}\right) \quad \leq \quad \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 .$$

Lema 1 [Ley de los Grandes Números — Versión Débil] *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, todas con varianza finita μ, y sea $\epsilon > 0$. Entonces,*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| > \epsilon\right\}\right) \quad \longrightarrow \quad 0\,, \qquad si\ n \to \infty\,.$$

Lema 2 [Ley de los Grandes Números — Versión Fuerte] *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tales que $\mathbb{E}\left(X_i\right) = 0$, y $\sigma^2 = \mathbb{V}ar\left(X_i\right)$. Si $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2/i^2 < \infty$, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\right\}\right) \quad = \quad 1\,.$$

Convención 1 *La función distribución de una* Normal$(0,1)$ *la denotaremos $\Phi(\cdot)$, i.e.,*

$$\Phi(t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}dx\,.$$

Teorema 2 [Teorema Central del Limite] *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas todas con media μ y varianza σ^2. Entonces, la distribución de*

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\,,$$

converge a la distribución de una Normal$(0,1)$*, i.e.,*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le t\right\}\right) \;\longrightarrow\; \Phi(t)\,, \qquad si\ n \to \infty\,.$$

Teorema 3 [Teorema Central del Limite para Variables Aleatorias Independientes] *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con medias y varianzas $\mu_i = \mathbb{E}\left(X_i\right)$, $\sigma_i^2 = \mathbb{V}ar\left(X_i\right)$. Si (i) los X_i están uniformemente acotadas, i.e., si para algún M, $\mathbb{P}\left(\{|X_i| < M\}\right) = 1$ para todo i, y (ii) $\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i^2 = \infty$, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}} \le t\right\}\right) \quad \longrightarrow \quad \Phi(t)\,, \qquad si\ n \to \infty\,.$$