MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **11 de Noviembre, 1999**

Resumen No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: E. Moreno, M. Saez*

1 Distribución Conjunta de Variables Aleatorias

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición 1 [**Función Distribución Conjunta**] *A $F_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se le llama función distribución conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ si para todo $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$,*

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{P}(\{X_1 \leq t_1, \ldots, X_n \leq t_n\}) .$$

Proposición 1 *Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $t_i \in \mathbb{R}$,*

$$F_{X_i}(t_i) = \lim_{t_1 \to \infty} \cdots \lim_{t_{i-1} \to \infty} \lim_{t_{i+1} \to \infty} \cdots \lim_{t_n \to \infty} F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) .$$

Definición 2 [**Funciones Distribución Marginales**] *A las funciones distribución $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ también se les denomina funciones distribución marginales de $F_{X_1,\ldots,X_n}$.*

Proposición 2 *Si F es la función distribución conjunta de $X_1, \ldots, X_n$, entonces*

1. *F es no–decreciente en cada una de sus coordenadas,*
2. *$\lim_{t_1 \to \infty} \cdots \lim_{t_n \to \infty} F(t_1, \ldots, t_n) = 1$, y para todo $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \lim_{t_i \to -\infty} F(t_1, \ldots, t_n) &= 0 \\ \lim_{t_i \to \infty} F(t_1, \ldots, t_n) &= F_{X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n) . \end{aligned}$$

Definición 3 [**Variables Aleatorias Conjuntamente Discretas**] *Se dice que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias conjuntamente discretas si toman a lo más una cantidad numerable de valores distintos, i.e., si $S_{X_1,\ldots,X_n} = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbb{P}(\{X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n\}) > 0\}$ es numerable y $\mathbb{P}(S_{X_1,\ldots,X_n}) = 1$. Al conjunto $S_{X_1,\ldots,X_n}$ se le denomina soporte del vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ y a la función $p_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ tal que $p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1, \ldots, a_n) = \mathbb{P}(\{X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n\})$ se le denomina función densidad de probabilidad conjunta de $X_1, \ldots, X_n$.*

Proposición 3 *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias conjuntamente discretas, se tiene que*

1. $\sum_{\vec{a} \in S_{X_1,\ldots,X_n}} p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1, \ldots, a_n) = 1$ *y si $\vec{a} \notin S_{X_1,\ldots,X_n}$ entonces $p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1, \ldots, a_n) = 0$.*

2. $F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{\vec{a}\in S_{X_1,\ldots,X_n}: a_1\leq t_1,\ldots,a_n\leq t_n} p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1,\ldots,a_n).$

3. $p_{X_i}(t_i) = \sum_{\vec{a}\in S_{X_1,\ldots,X_n}: a_i = t_i} p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1,\ldots,a_n).$

Definición 4 [**Funciones Densidad de Probabilidad Marginales**] *A las funciones densidad de probabilidad $p_{X_1},\ldots,p_{X_n}$ también se les denomina funciones densidad de probabilidad marginales de $p_{X_1,\ldots,X_n}$.*

Definición 5 [**Variables Aleatorias Conjuntamente Continuas**] *Se dice que $X_1,\ldots,X_n$ son variables aleatorias conjuntamente continuas si existe una función $f_{X_1,\ldots,X_n}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tal que para todo $C\subseteq\mathbb{R}^n$ para el cual $\{(X_1,\ldots,X_n)\in C\}\in\mathcal{F}$ se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(\{(X_1,\ldots,X_n)\in C\}\right) \;=\; \int\cdots\int_C f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n\,.$$

A la función $f_{X_1,\ldots,X_n}$ se le denomina función densidad conjunta de $X_1,\ldots,X_n$.

Proposición 4 *Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias conjuntamente continuas, se tiene que*

1. $\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n = 1.$

2. $F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \int_{-\infty}^{t_1}\cdots\int_{-\infty}^{t_n} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n$ *y si $f_{X_1,\ldots,X_n}$ es continua en $(t_1,\ldots,t_n)$, entonces* $f_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) \;=\; \dfrac{\partial^n}{\partial t_1\ldots\partial t_n}F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n).$

3. $f_{X_i}(t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_{i-1}dx_{i+1}\cdots dx_n.$

Definición 6 [**Funciones Densidad Marginales**] *A las funciones densidad de probabilidad $f_{X_1},\ldots,f_{X_n}$ también se les denomina funciones densidad marginales de $f_{X_1,\ldots,X_n}$.*

Definición 7 [**Variables Aleatorias Independientes**] *Se dice que $X_1,\ldots,X_n$ son variables aleatorias independientes si para todo $A_1,\ldots,A_n\subseteq\mathbb{R}$ tal que $\{X_1\in A_1\},\ldots,\{X_n\in A_n\}\in\mathcal{F}$,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n\{X_i\in A_i\}\right) \;=\; \prod_{i=1}^n\mathbb{P}\left(\{X_i\in A_i\}\right)\,.$$

Una colección infinita de variables aleatorias se dice independiente si cualquier subcolección finita de ellas es independiente.

Lema 1 *$X_1,\ldots,X_n$ son independientes sí y sólo si $F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) \;=\; \prod_{i=1}^n F_{X_i}(t_i)$.*

Corolario 1 *$X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes sí y sólo si*

- $p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(a_i)$ *para todo* $\vec{a} \in S_{X_1,\ldots,X_n}$ *en el caso que* $X_1, \ldots, X_n$ *sean conjuntamente discretas.*
- $f_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t_i)$ *para todo* $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$ *en el caso que* $X_1, \ldots, X_n$ *sean conjuntamente continuas.*

Lema 2 *Sea $I \subseteq \mathbb{N}$. Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una colección de variables aleatorias independientes y para todo $i \in I$ la función $g_i \colon D_i \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $\mathbb{P}(\{X_i \in D_i\}) = 1$ e $Y_i = g_i(X_i)$ es variable aleatoria, entonces $\{Y_i\}_{i\in I}$ es una colección de variables aleatorias independientes.*

Lema 3 [**Suma de Variables Aleatorias Independientes**] *Si X_1 e X_2 son variables aleatorias independientes, entonces*

- $p_{X_1+X_2}(c) = \sum_{a\in S_{X_1}} p_{X_1}(a)p_{X_2}(c-a) = \sum_{b\in S_{X_2}} p_{X_1}(c-b)p_{X_2}(b)$ *en el caso que X_1 y X_2 sean conjuntamente discretas,*
- $f_{X_1+X_2}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(x)f_{X_2}(t-x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(t-x)f_{X_2}(x)dx$ *en el caso que X_1 y X_2 sean conjuntamente continuas.*

Lema 4 *Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim \text{Normal}(\mu_i, \sigma_i^2)$, entonces $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Normal}(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$, y si además $X_1, \ldots, X_n$ son idénticamente distribuidas de acuerdo a una $\text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, entonces $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Normal}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.*

Lema 5 [**Método del Jacobiano**] *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias conjuntamente continuas. Sean $D, R \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $\mathbb{P}(\{X \in D\}) = 1$ y $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_n) \colon D \to R$ tal que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $Y_i = g_i(X_1, \ldots, X_n)$ es variable aleatoria (en particular esto último ocurre cuando g_i es continua). Si además*

1. *$\vec{g}$ es biyección, i.e., para todo $(y_1, \ldots, y_n) \in R$, el sistema de ecuaciones $y_i = g_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, tiene solución única $x_i = h_i(y_1, \ldots, y_n)$.*
2. *las funciones $g_1, \ldots, g_n$ son tales que todas sus derivadas parciales son continuas y que el Jacobiano de $\vec{g}$ es no nulo para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in D$, i.e.,*

$$(x_1, \ldots, x_n) \in D \quad \Longrightarrow \quad J(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Det} \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{array} \right) \Bigg|_{(x_1,\ldots,x_n)} \neq 0 .$$

Entonces, se tiene que $Y_1, \ldots, Y_n$ *son variables aleatorias conjuntamente continuas y*

$$\begin{aligned} f_{Y_1,\ldots,Y_n}(\vec{y}) &= \begin{cases} f_{X_1,\ldots,X_n}(\vec{g}^{\,-1}(\vec{y}))\left|J(\vec{g}^{\,-1}(\vec{y}))\right|^{-1} & \text{si } \vec{y} \in R, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_{X_1,\ldots,X_n}(\vec{h}(\vec{y}))\left|J(\vec{h}(\vec{y}))\right|^{-1} & \text{si } \vec{y} \in R, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{aligned}$$

2 Esperanza Matemática

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean X, $X_1, \ldots, X_n$, e Y variables aleatorias sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición 8 [**Esperanza**] *Se define la esperanza o media de* X*, denotada* $\mathbb{E}(X)$*, por*

$$\mathbb{E}(X) = -\int_{-\infty}^{0} F_X(t)dt + \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(t))dt,$$

siempre y cuando alguna de las integrales sea finita.

Proposición 5 *Si* $\mathbb{P}(\{X \geq 0\}) = 1$*, entonces* $\mathbb{E}(X) \geq 0$*.*

Proposición 6 *Si* $\mathbb{E}(X)$ *es finita,*

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{a \in S_X} a p_X(a), & \text{si } X \text{ es discreta}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)dt, & \text{si } X \text{ es absolutamente continua}. \end{cases}$$

Proposición 7 [**Esperanza de una Función de una Variable Aleatoria**] *Si* $g\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es tal que* $\mathbb{P}(\{X \in D\}) = 1$ *y* $g(X)$ *es variable aleatoria,*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{a \in S_X} g(a) p_X(a), & \text{si } X \text{ es discreta}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)dt, & \text{si } X \text{ es absolutamente continua}. \end{cases}$$

Lema 6 *Si* $A \in \mathcal{F}$*, y* $\mathbb{I}_A$ *denota la variable aleatoria* $\mathbb{I}_A(\omega) = 1$ *si* $\omega \in A$ *y* $\mathbb{I}_A(\omega) = 0$ *si* $\omega \in \Omega \setminus A$*, entonces* $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = \mathbb{P}(A)$*.*

Definición 9 [**Varianza y Desviación**] *Se define la varianza de* X*, denotada* $\mathbb{V}ar(X)$*, por*

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

La desviación de X*, denotada* $\sigma(X)$*, se define por* $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}$*.*

Proposición 8 [**Esperanza de una Función de un Vector Aleatorio**] *Si $\vec{X}$ denota el vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$, $g\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es tal que $\mathbb{P}\left(\left\{\vec{X} \in D\right\}\right) = 1$ y $g(\vec{X})$ es variable aleatoria,*

$$\mathbb{E}\left(g(\vec{X})\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\vec{a}\in S_{\vec{X}}} g(\vec{a}) p_{\vec{X}}(\vec{a})\,, & \text{si } X_1, \ldots, X_n \text{ son conjuntamente discretas}, \\ \displaystyle\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{x}) f_{\vec{X}}(\vec{x}) dx_1 \cdots dx_n\,, & \text{si } X_1, \ldots, X_n \text{ son conjuntamente continuas}. \end{cases}$$

Corolario 2 [**Linealidad de la Esperanza**] *Si X e Y son variables aleatorias y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X+Y) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\,, \\ \mathbb{E}(aX+b) &= a\mathbb{E}(X) + b\,. \end{aligned}$$

Corolario 3 *Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) + \mathbb{E}^2(X)\,, \\ \mathbb{V}ar(aX+b) &= a^2 \mathbb{V}ar(X)\,. \end{aligned}$$

Definición 10 [**Covarianza**] *Se define la covarianza de X e Y, denotada $\mathbb{C}ov(X,Y)$, por*

$$\mathbb{C}ov(X,Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right)\,.$$

Proposición 9 *Si $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar(X) &= \mathbb{C}ov(X,X)\,, \\ \mathbb{C}ov(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)\,, \\ \mathbb{C}ov(X,Y) &= \mathbb{C}ov(Y,X)\,, \\ \mathbb{C}ov(aX+b, a'Y+b') &= aa'\,\mathbb{C}ov(X,Y)\,, \\ \mathbb{V}ar(X \pm Y) &= \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y) \pm 2\,\mathbb{C}ov(X,Y)\,. \end{aligned}$$

Proposición 10 *La covarianza es una forma bilineal, i.e., si X, X', Y, e Y' son variables aleatorias,*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov(X \pm X', Y) &= \mathbb{C}ov(X,Y) \pm \mathbb{C}ov(X',Y)\,, \\ \mathbb{C}ov(X, Y \pm Y') &= \mathbb{C}ov(X,Y) \pm \mathbb{C}ov(X,Y')\,. \end{aligned}$$

Lema 7 *Sean $g\colon D_X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h\colon D_Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que $\mathbb{P}(\{X \in D_X\}) = \mathbb{P}(\{Y \in D_Y\}) = 1$ y $g(X)$ y $h(Y)$ son variables aleatorias. Si X e Y son independientes,*

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\,\mathbb{E}(h(Y))\,.$$

En particular, si X e Y son independientes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

Corolario 4 *Si X e Y son independientes, $\mathbb{V}ar(X+Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y)$ y $\mathbb{C}ov(X,Y) = 0$.*

Definición 11 **[Correlación]** *Si $\sigma(X), \sigma(Y) > 0$, se define la correlación entre X e Y, denotada $\rho(X,Y)$, por*

$$\rho(X,Y) \quad = \quad \frac{\mathbb{C}ov\,(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\,.$$

Proposición 11 *Se tiene que $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$, $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$, y además,*

- *si $\rho(X,Y) = \pm 1$, entonces $\mathbb{P}(\{Y = a+bX\}) = 1$ para algún $a \in \mathbb{R}$ y $b = \pm\sigma(Y)/\sigma(X)$.*
- *si $\mathbb{P}(\{Y = a+bX\}) = 1$, entonces $|\rho(X,Y)| = 1$.*

Proposición 12 *Si $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ son variables aleatorias,*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,(X_i)\;, \qquad \mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar\,(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{C}ov\,(X_i, X_j)\;.$$

y

$$\mathbb{C}ov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbb{C}ov\,(X_i, Y_j)\;.$$

Lema 8 *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias. Si para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{X_n \geq 0\}) = 1$, o $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\,(|X_n|) < +\infty$, entonces $\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\,(X_n)$.*

Lema 9 *Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes*

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,(X_i)\;, \qquad y \qquad \mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar\,(X_i)\;.$$

Definición 12 **[Momentos]** *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{E}\,(X^n)$ se denomina el n-ésimo momento de X o el momento de orden n de X.*

Definición 13 **[Función Generadora de Momentos]** *Se define la función generadora de momentos $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\,X}\right)$.*

Lema 10 *Si la función generadora de momentos de X, $\phi_X(\cdot)$, es n veces diferenciable en un intervalo abierto en torno al 0, entonces*

$$\mathbb{E}\,(X^n) \quad = \quad \left.\frac{d^n\phi_X}{dt^n}\right|_{t=0}\,.$$

Proposición 13 *Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\phi_{a\,X+b}(t) = e^{tb}\phi_X(at)$.*

Proposición 14 *Si X e Y son independientes, entonces $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Lema 11 *$X_1, \ldots, X_n$ son independientes sí y sólo si $\mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^n t_i X_i}\right) = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(t_i)$ para todo $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.*

Teorema 1 *Si la función generadora de momentos de X, $\phi_X(\cdot)$, es finita en un intervalo abierto en torno a $t = 0$ entonces la función distribución de X, $F_X(\cdot)$, está completamente determinada por $\phi_X(\cdot)$.*