MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**7 de Octubre, 1999**

Resumen No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: M. Saez, E. Moreno*

1 Probabilidades Condicionales

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

Convención 1 *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos denotamos su intersección $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ por $A_1 A_2 \cdots A_n$.*

Definición 1 [Probabilidad Condicional] *Sean $E, F \in \mathcal{F}$ dos eventos tales que $\mathbb{P}(F) > 0$ se define la probabilidad de E dado F, denotado $\mathbb{P}(E/F)$, por $\mathbb{P}(E/F) = \mathbb{P}(EF)/\mathbb{P}(F)$.*

Proposición 1 *Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ y $\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) > 0$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_n / A_1 \cdots A_{n-1})\, \mathbb{P}(A_{n-1} / A_1 \cdots A_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(A_2/A_1)\, \mathbb{P}(A_1)\ .$$

Proposición 2 *Sea $F \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(F) > 0$ sigue que $\mathbb{P}(\cdot/F) : \mathcal{F} \to [0,1]$ tal que a E le asocia $\mathbb{P}(E/F)$ es una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Definición 2 [$\mathbb{P}$-partición] *Sea I un conjunto de índices, se dice que $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}$ es una $\mathbb{P}$-partición si $\mathbb{P}(A_i) > 0$, $\mathbb{P}(\cup_{i \in I} A_i) = 1$, y para todo $i, j \in I$ tal que $i \neq j$ se tiene que $\mathbb{P}(A_i A_j) = 0$.*

Proposición 3 *Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una partición de Ω entonces también es una $\mathbb{P}$-partición.*

Lema 1 [Regla de Probabilidades Totales] *Sea I un conjunto de índices numerables y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una $\mathbb{P}$-partición. Sigue que para todo $A \in \mathcal{F}$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A/A_i)\, \mathbb{P}(A_i)\ .$$

Teorema 1 [Teorema de Bayes] *Sea I un conjunto de índices numerables y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una $\mathbb{P}$-partición. Si $A \in \mathcal{F}$ es tal que $\mathbb{P}(A) > 0$ se tiene que*

$$\forall j \in I\,, \qquad \mathbb{P}(A_j/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_j)\, \mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A/A_j)\, \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A/A_i)\, \mathbb{P}(A_i)}\,.$$

Definición 3 [**Independencia**] *Se dice que* $A, B \in \mathcal{F}$ *son eventos independientes si* $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. *En general, se dice que* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ *es una colección de eventos independientes si para todo* $n > 0$ *y* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) .$$

Lema 2 *Si* $A, B \in \mathcal{F}$ *son eventos independientes entonces* B *y* A, A *y* B^c, A^c *y* B, *y* A^c *y* B^c *también son eventos independientes. En general, si* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ *es una colección de eventos independientes,* $A \in \mathcal{C}$, *y* B *se obtiene a partir de los eventos en* $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ *mediante una secuencia finita de operaciones de conjuntos (como complementación, unión, intersección, resta de conjuntos, diferencia simétrica, unión numerable, intersección numerable) entonces* A *y* B *son independientes.*

Definición 4 [**Experimentos Independientes**] *Sea* I *un conjunto numerable de índices y* $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ *una sucesión de experimentos con espacios de probabilidad* $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)\}_{i\in I}$. *Se dice que el experimento* $\mathcal{E}$ *dotado del espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *corresponde a la realización simultánea e independiente de los experimentos* $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ *si* $\Omega = \times_{i\in I}\Omega_i$ *y se satisface que:*

- *si* I *es finito y* $A_i \in \mathcal{F}_i$ *para todo* $i \in I$, *entonces para todo* $A = \times_{i\in I} A_i \subseteq \Omega$, *se tiene que* $A \in \mathcal{F}$ *y* $\mathbb{P}(A) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}_i(A_i)$.
- *si* I *es infinito,* J *es subconjunto finito de* I, *y* $A_j \in \mathcal{F}_j$ *para todo* $j \in J$, *entonces para todo* $A = \times_{i\in I} B_i \subseteq \Omega$ *tal que* $B_i = \Omega_i$ *si* $i \notin J$, *se tiene que* $A \in \mathcal{F}$ *y* $\mathbb{P}(A) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}_j(A_j)$.

2 Variables Aleatorias

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

Definición 5 [**Variable Aleatoria**] *Una función* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que para todo* $t \in \mathbb{R}$ *se tiene que* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}$ *se denomina variable aleatoria sobre el espacio medible* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición 6 [**Función Distribución**] *Sea* X *una variable aleatoria sobre el espacio medible* $(\Omega, \mathcal{F})$. *La función* $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $F_X(t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\})$ *se llama función distribución de* X.

En lo que sigue sea X una variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Convención 2 *Los eventos* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}$, $\{\omega \in \Omega : t \leq X(\omega) < t'\}$, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) > t\}$, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = t\}$, *y* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ *donde* $A \subset \mathbb{R}$, *los denotaremos por* $\{X \leq t\}$, $\{t \leq X < t'\}$, $\{X > t\}$, $\{X = t\}$, *y* $\{X \in A\}$ *respectivamente.*

Proposición 4 *Si* F *es una función distribución entonces*

1. *F es no–decreciente, i.e., si $t \leq t'$ entonces $F(t) \leq F(t')$.*
2. $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ *y* $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$.
3. *F es continua por la derecha, i.e., si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente convergente a t, entonces*
$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) \;=\; F(t)\,.$$

Corolario 1 *Si F es una función distribución discontinua en t entonces sólo puede tener una discontinuidad de salto en t, i.e., si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente convergentes a t, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) \;<\; F(t)\,.$$

Proposición 5 *Si F es una función distribución entonces tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades.*

2.1 Variables Aleatorias Discretas

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$

Definición 7 [Variable Aleatoria Discreta] *Se dice que X es una variable aleatoria discreta si toma a lo más una cantidad numerable de valores distintos, i.e., si $S_X = \{a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\{X = a\}) > 0\}$ es numerable y $\mathbb{P}(S_X) = 1$. Al conjunto S_X se le denomina soporte de X y a la función $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que $p_X(a) = \mathbb{P}(\{X = a\})$ se le denomina función densidad de probabilidad de X.*

Proposición 6 *Sea X una variable aleatoria discreta, se tiene que*

1. *si $a \in S_X$, entonces $p_X(a) > 0$.*
2. *si $a \notin S_X$, entonces $p_X(a) = 0$.*
3. $\sum_{a\in S_X} p_X(a) = 1$.
4. *la función densidad de probabilidad de X determina la función distribución de X, en particular,*
$$F_X(t) \;=\; \sum_{a\in S_X : a\leq t} p_X(a)\,.$$

Modelos discretos: A continuación se da la fórmula de la función de densidad probabilidad p_X y los parámetros de varias distribuciones importantes de variables aleatorias X discretas. También se especifica el soporte S_X de cada tipo de variable aleatoria.

BERNOULLI: X es una Bernoulli de parámetro $p \in [0,1]$, i.e. $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, si

$$p_X(i) \;=\; p^i(1-p)^{1-i}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \{0,1\}\,.$$

Binomial: X es una binomial de parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $p \in [0,1]$, i.e. $X \sim \mathrm{Binomial}(n,p)$, si

$$p_X(i) \;=\; \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \{0,\ldots,n\}\,.$$

Geométrica: X es una geométrica de parámetro $p \in (0,1]$, i.e. $X \sim \mathrm{Geomtrica}(p)$, si

$$p_X(i) \;=\; (1-p)^{i-1} p\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \mathbb{N} \setminus \{0\}\,.$$

Pascal: X es una Pascal de parámetros $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $p \in (0,1]$, i.e. $X \sim \mathrm{Pascal}(r,p)$, si

$$p_X(i) \;=\; \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \{r, r+1, r+2, \ldots\}\,.$$

Hipergeométrica: X es una hipergeométrica de parámetros $N, B, n \in \mathbb{N}$, $n \leq \min\{N, B\}$, i.e., $X \sim \mathrm{Hiper}(n, N, B)$, si

$$p_X(i) \;=\; \frac{\binom{N}{i}\binom{B}{n-i}}{\binom{N+B}{n}}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \{0,\ldots,n\}\,.$$

Poisson: X es una Poisson de parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, i.e. $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, si

$$p_X(i) \;=\; \frac{1}{i!} \lambda^i e^{-\lambda}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \mathbb{N}.$$

2.2 Variables Aleatorias Absolutamente Continuas

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$

Definición 8 [**Variable Aleatoria Absolutamente Continua**] *Se dice que X es una variable aleatoria absolutamente continua si existe una función $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $C \subseteq \mathbb{R}$ para el cual $\{X \in C\} \in \mathcal{F}$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(\{X \in C\}) \;=\; \int_C f_X(x)\,dx\,.$$

A la función f_X se le denomina función densidad de la variable aleatoria X.

Proposición 7 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua, se tiene que*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx \;=\; 1$ *y* $\mathbb{P}(\{X = t\}) = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

2. $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$ *y si* f_X *es continua en* t*, entonces* $f_X(t) = \dfrac{d}{dt} F_X(t)$.

Proposición 8 *Si* X *es variable aleatoria y* $h{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es tal que* $\{x \in \mathbb{R} : h(x) \neq f_X(x)\}$ *es numerable, entonces* h *también es función densidad de* X*, i.e., para todo* $t \in \mathbb{R}$*,*

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{t} h(x)dx\,.$$

En particular, la función densidad de una variable aleatoria no es única.

Proposición 9 *Sea* X *una variable aleatoria absolutamente continua. Sean* $D, R \subseteq \mathbb{R}$ *tales que* $\mathbb{R} \setminus f_X^{-1}(\{0\}) \subseteq D$ *y* $g{:}D \to R$ *tal que* $Y = g(X)$ *es variable aleatoria (en particular esto ocurre cuando* g *es continua). Sigue que*

$$F_Y(t) = \mathbb{P}\left(\left\{X \in g^{-1}((-\infty, t])\right\}\right)\,.$$

Si además g *es biyectiva y diferenciable, entonces* Y *es absolutamente continua y*

$$f_Y(t) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(t)) \left|\dfrac{d}{dt} g^{-1}(t)\right| & \textit{si } t \in R, \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Modelos absolutamente continuos: A continuación se da la fórmula de la función densidad f_X y los parámetros de varias distribuciones importantes de variables aleatorias X absolutamente continuas.

Uniforme: X es una uniforme de parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, denotado $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{en caso contrario}\,. \end{cases}$$

Exponencial: X es una exponencial de parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, denotado $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario}\,. \end{cases}$$

Normal: X es una normal de parámetros $\mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, denotado $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, si

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,, \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}\,.$$

Gama: X es una gama de parámetros $\lambda, p \in \mathbb{R}$, $\lambda, p > 0$, denotado $X \sim \text{Gama}(p, \lambda)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(p)} \lambda (\lambda x)^{p-1} e^{-\lambda x}\,, & \text{si } x > 0\,, \\ 0 & \text{en caso contrario}\,, \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

Chi-cuadrado: X es una chi-cuadrado con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ grados de libertad, i.e., $X \sim \chi^2_n$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\, x^{n/2-1}\, e^{-x/2}\,, & \text{si } x > 0\,, \\ 0 & \text{en caso contrario}\,, \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

Cauchy: X es una Cauchy de parámetro $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, denotado $X \sim \text{Cauchy}(\mu, \sigma)$, si

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sigma\,\left(1 + \frac{1}{\sigma^2}\,(x-\mu)^2\right)}\,, \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}.$$

Beta: X es una beta de parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, denotado $X \sim \text{Beta}(a, b)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{en caso contrario}\,, \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

Proposición 10 *Si* $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ *y* Φ *denota la función distribución de una* $\text{Normal}(0,1)$*, entonces*

1. $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ *cualquiera sea* $t \in \mathbb{R}$*,*
2. *si* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$*, entonces* $aX + b \sim \text{Normal}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$*, en particular* $(X - \mu)/\sigma \sim \text{Normal}(0,1)$.