MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**26 de Agosto, 1999**

Resumen No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: M. Saez, E. Moreno*

1 Análisis Combinatorial

Lema 1 [Principio Generalizado del Conteo] *Dados r experimentos $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_r$ tales que para cada n_{i-1} posibles resultados de $\mathcal{E}_{i-1}$ hay n_i posibles resultados de $\mathcal{E}_i$, se tiene que hay $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$ posibles distintos resultados que se pueden obtener de la realización conjunta de los r experimentos.*

Proposición 1 *Hay $n!$ distintas permutaciones (ordenamientos) de n objetos distinguibles.*

Proposición 2 *Sea $n \geq k$. Con n objetos distinguibles se pueden formar $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ distintos ordenamientos de largo k.*

Proposición 3 *Sea $n \geq k$. Con n objetos distinguibles se pueden formar $\dbinom{n}{k}$ subconjuntos distintos de cardinalidad k.*

Definición 1 *Sean $n, n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tales que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Se define el coeficiente multinomial $\dbinom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$.*

Lema 2 *Sea $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Hay $\dbinom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ formas de distribuir n bolas distinguibles en r urnas distinguibles de forma que en la i-ésima urna queden n_i bolas.*

Lema 3 *Sea $r > 0$. Hay $\dbinom{n+r-1}{r-1} = \dbinom{n+r-1}{n}$ formas de distribuir n bolas indistinguibles en r urnas distinguibles.*

Lema 4 *Sea $n \geq r > 0$. Hay $\dbinom{n-1}{r-1}$ formas de distribuir n bolas indistinguibles en r urnas distinguibles de forma que ninguna urna quede vacía.*

2 Teoría Axiomática de Probabilidades

Definición 2 [Medida de Probabilidad] *Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una familia de eventos de interés (técnicamente una σ-álgebra). Decimos que $\mathbb{P}(\cdot)$ es una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ si $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ es tal que*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. [**σ-aditividad**] *si* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una colección de eventos disjuntos, i.e. tales que* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$, *se tiene que* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$.

A la tripleta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *se le denomina espacio de probabilidad.*

Observación 1 *Si* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *es un espacio de probabilidad, entonces* $\mathbb{P}(\cdot)$ *sólo está definida sobre* $\mathcal{F}$. *En rigor, deberíamos tener cuidado de evaluar* $\mathbb{P}(\cdot)$ *sólo en aquellos conjuntos* E *pertenecientes a* $\mathcal{F}$. *En este curso no nos preocuparemos de esto, asumiremos que todo funciona bien, o en otras palabras que cada vez que estemos evaluando* $\mathbb{P}(\cdot)$ *en algún conjunto* E *dicho conjunto pertenece a* $\mathcal{F}$.

Proposición 4 *Se tiene que;*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
2. *para todo evento* E *se tiene que* $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$,
3. *si* E *y* F *son eventos tales que* $E \subseteq F$, *entonces* $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$.
4. [**Aditividad finita**] *si* I *es un conjunto finito de índices y* $\{E_i\}_{i\in I}$ *una colección de eventos disjuntos, i.e.* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j$, *entonces* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(E_i)$.

Lema 5 [**Principio de Inclusión–exclusión**] *Si* $\{E_i\}_{i=1}^n$ *es una colección de eventos entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i_1<i_2} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \cdots \\ &\quad + (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r}) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(E_1 \cap \cdots \cap E_n)\ , \end{aligned}$$

donde $\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r})$ *se toma sobre todos los* $\binom{n}{r}$ *posibles subconjuntos de* $\{1, \ldots, n\}$ *de tamaño* r.

Definición 3 [**Espacios Equiprobables**] *Se dice* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *es un espacio de probabilidad equiprobable si existe algún* $0 < p \leq 1$ *tal que para todo* $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p$.

Lema 6 *Si* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *es un espacio de probabilidad equiprobable entonces* Ω *es finito y* $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/|\Omega|$ *cualquiera sea* $\omega \in \Omega$. *Más aún,* $\mathbb{P}(E) = |E|/|\Omega|$ *cualquiera sea* $E \subseteq \Omega$.

Definición 4 [**Sucesiones crecientes/decrecientes de conjuntos**] *Se dice que* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión creciente (respectivamente decreciente) de eventos si* $E_n \subseteq E_{n+1}$ *(respectivamente* $E_n \supseteq E_{n+1}$*). En el caso de sucesiones crecientes definimos* $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=0}^{n} E_n$ *y en el caso de sucesiones decrecientes* $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=0}^{n} E_n$.

Lema 7 [**Continuidad de la medida de probabilidad**] *Para toda sucesión creciente o decreciente de eventos* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right).$$

Lema 8 [**Desigualdad de Boole**] *Si* $\{E_i\}_{i\in I}$ *es una colección numerable de eventos, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \quad \leq \quad \sum_{i\in I}\mathbb{P}\left(E_i\right)\ .$$

3 Probabilidades Condicionales

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

Convención 1 *Si* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *son conjuntos denotamos su intersección* $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ *por* $A_1 A_2 \cdots A_n$.

Definición 5 [**Probabilidad Condicional**] *Sean* $E, F \in \mathcal{F}$ *dos eventos tales que* $\mathbb{P}(F) > 0$ *se define la probabilidad de* E *dado* F*, denotado* $\mathbb{P}(E/F)$*, por* $\mathbb{P}(E/F) = \mathbb{P}(EF)/\mathbb{P}(F)$.

Proposición 5 *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) > 0$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_n/A_1 \cdots A_{n-1})\,\mathbb{P}(A_{n-1}/A_1 \cdots A_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(A_2/A_1)\,\mathbb{P}(A_1)\ .$$

Proposición 6 *Sea* $F \in \mathcal{F}$ *tal que* $\mathbb{P}(F) > 0$ *sigue que* $\mathbb{P}(\cdot/F) : \mathcal{F} \to [0,1]$ *tal que a* E *le asocia* $\mathbb{P}(E/F)$ *es una medida de probabilidad sobre el espacio medible* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición 6 [$\mathbb{P}$-**partición**] *Sea* I *un conjunto de índices, se dice que* $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}$ *es una* $\mathbb{P}$-*partición si* $\mathbb{P}(A_i) > 0$, $\mathbb{P}(\cup_{i\in I} A_i) = 1$, *y para todo* $i, j \in I$ *tal que* $i \neq j$ *se tiene que* $\mathbb{P}(A_i A_j) = 0$.

Proposición 7 *Si* $\{A_i\}_{i\in I}$ *es una partición de* Ω *entonces también es una* $\mathbb{P}$-*partición.*

Lema 9 [**Regla de Probabilidades Totales**] *Sea* I *un conjunto de índices numerables y sea* $\{A_i\}_{i\in I}$ *una* $\mathbb{P}$-*partición. Sigue que para todo* $A \in \mathcal{F}$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(AA_i) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(A/A_i)\,\mathbb{P}(A_i)\ .$$

Teorema 1 [**Teorema de Bayes**] *Sea* I *un conjunto de índices numerables y sea* $\{A_i\}_{i\in I}$ *una* $\mathbb{P}$-*partición. Si* $A \in \mathcal{F}$ *es tal que* $\mathbb{P}(A) > 0$ *se tiene que*

$$\forall j \in I\,, \qquad \mathbb{P}(A_j/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A/A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A/A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}\,.$$