MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**27 de Noviembre, 1999**

Pauta Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi, A. Moreira *Prof. Auxiliar: J. Barrera, E. Moreno, M. Saez*

PROBLEMA 1:

(i).- Calcularemos primero $F_R(\cdot)$. Si $r \leq 0$, como $\sqrt{2\ln(1/x)} > 0$ cualquiera sea $0 < x < 1$ y puesto que V sólo toma valores en el intervalo $(0,1)$, entonces

$$F_R(r) \;=\; \mathbb{P}\left(\{R \leq r\}\right) \;=\; 0\,.$$

Si $r > 0$, entonces $F_R(r) \;=$

$$\mathbb{P}\left(\{R \leq r\}\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\left\{\sqrt{2\ln(1/V)} \leq r\right\}\right) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(\left\{V < e^{-r^2/2}\right\}\right) \;=\; 1 - F_V(e^{-r^2/2})\,.$$

Luego,

$$F_R(r) \;=\; \begin{cases} 1 - F_V(e^{-r^2/2})\,. & \text{si } r > 0\,, \\ 0\,, & \text{en caso contrario}\,. \end{cases}$$

Derivando,

$$f_R(r) \;=\; \frac{dF_R(r)}{dr} \;=\; \begin{cases} f_V(e^{-r^2/2})re^{-r^2/2}\,, & \text{si } r > 0\,, \\ 0\,, & \text{en caso contrario}\,. \end{cases}$$

Como V se distribuye uniformemente en $(0,1)$, sabemos que $f_V(t) = \mathbb{I}_{(0,1)}(t)$, además si $r > 0$ entonces $0 < e^{-r^2/2} < 1$. Luego,

$$f_R(r) \;=\; \begin{cases} re^{-r^2/2}\,, & \text{si } r > 0\,, \\ 0\,, & \text{en caso contrario}\,. \end{cases}$$

Finalmente, observar que Θ y R son independientes puesto que son función de variables aleatorias independientes.

(ii).- Sea

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \;=\; \vec{g}(R,\Theta) \;=\; \begin{pmatrix} g_1(R,\Theta) \\ g_2(R,\Theta) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} R\cos\Theta \\ R\sin\Theta \end{pmatrix}\,,$$

donde $\vec{g}:(0,\infty) \times (-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Verifiquemos ahora que se cumplen las condiciones para aplicar el método del Jacobiano.

(i) Para todo (x,y) en el recorrido de $\vec{g}$, el sistema $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ tiene solución única $\theta = \arccos(x/\sqrt{x^2+y^2})$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, cualquiera sean $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(ii) El Jacobiano de $\vec{g}$ es

$$J(r,\theta) \;=\; \operatorname{Det}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial r} & \dfrac{\partial g_2}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial g_1}{\partial \theta} & \dfrac{\partial g_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} \;=\; \operatorname{Det}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \;=\; r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \;=\; r\,.$$

Luego, $J(r,\theta)$ es no nulo cualquiera sea (r,θ) en el dominio de $\vec{g}$.

Sigue que para todo $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_{R,\Theta}(r,\theta)|J(r,\theta)|^{-1}\Big|_{r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arccos(x/\sqrt{x^2+y^2})} \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\mathbb{I}_{(-\pi,\pi]}(\theta)\cdot re^{-r^2/2}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(r)\cdot\frac{1}{r}\Big|_{r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arccos(x/\sqrt{x^2+y^2})} \\ &= \frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,. \end{aligned}$$

Para lo que sigue conviene suponer que $f_{X,Y}$ está definida en $(x,y)=(0,0)$ y vale

$$\frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\Big|_{x=y=0} = \frac{1}{2\pi}\,.$$

Como lo anterior redefine la densidad conjunta en un sólo punto, no altera la distribución conjunta y por lo tanto tampoco la propiedad de dependencia/independencia de las variables aleatorias X e Y. Estableceremos la independencia de X e Y comprobando que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ cualquiera sean $x,y \in \mathbb{R}$. Primero necesitamos calcular las funciones densidad marginales de X e Y, i.e., $f_X(\cdot)$ y $f_Y(\cdot)$. Para ello, observar que

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,,$$

donde la última igualdad se deriva del hecho que la función bajo la integral es la función densidad de una Normal$(0,1)$ por lo que integra a 1 en $\mathbb{R}$. Es decir, X es una Normal$(0,1)$. Análogamente se verifica que Y se distribuye de acuerdo a una Normal$(0,1)$. Un calculo fácil permite comprobar que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ cualquiera sean $x,y\in\mathbb{R}$, luego, X e Y son independientes.

(ii).- Supongamos utilizamos el generador de números aleatorios para obtener una secuencia de números $N_1,N_2,N_3,\ldots$ uniformemente distribuidos en $\{1,\ldots,MaxNum\}$. Asumiendo que el generador es suficientemente bueno, se debería tener que $N_1,N_2,\ldots$, son independientes. Típicamente, $MaxNum$ es un número muy grande, por lo que es razonable asumir que

$$U_i = \frac{N_{2i}}{MaxNum}\,, \quad \text{y} \quad V_i = \frac{N_{2i-1}}{MaxNum+1}\,,$$

son variables aleatorias independientes uniformes en $(0,1]$ y $(0,1)$ respectivamente. Luego, las partes anteriores sugieren generar una secuencia de valores $X_1,Y_1,X_2,Y_2,\ldots$, distribuidos como normales independientes de media 0 y varianza 1 de la siguiente forma:

$$X_i = \sqrt{2\ln\frac{1}{V_i}}\cos\left(\pi(2U_i-1)\right)\,, \quad \text{y} \quad Y_i = \sqrt{2\ln\frac{1}{V_i}}\sin\left(\pi(2U_i-1)\right)\,.$$

PROBLEMA 2:

(i).- Recordemos que la suma de normales independientes es también una normal. Si $X_1,\ldots,X_n$ son normales independientes, y como sus medias y varianzas son μ y σ^2 respectivamente, se tiene que P_n se distribuye como una Normal$(\mathbb{E}\,(P_n)\,,\mathbb{V}ar\,(P_n)\,,)$. Pero,

$$\mathbb{E}\,(P_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\,(X_i) = n\mu\,, \quad \text{y} \quad \mathbb{V}ar\,(P_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}ar\,(X_i) = n\sigma^2\,.$$

Sigue que $(P_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ se distribuye como una Normal$(0,1)$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}\left(\{P_n > an\}\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\left\{\frac{P_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{(a-\mu)n}{\sigma\sqrt{n}}\right\}\right) \;=\; 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

(ii).- Si n es suficientemente grande, como $X_1, \ldots, X_n$ son idénticamente distribuidas independientes de medias y varianzas finitas, entonces el Teorema Central de Limite nos asegura que $P_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es aproximadamente una Normal$(\mathbb{E}(P_n), \mathbb{V}ar(P_n))$ = Normal$(n\mu, n\sigma^2)$. Es decir, P_n se distribuye aproximadamente como en (i). Luego, un argumento análogo al realizado en la parte anterior permite concluir que

$$\mathbb{P}\left(\{P_n > an\}\right) \;\approx\; 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

(iii).- La desigualdad de Markov no es aplicable en este caso pues P_n no es una variable aleatoria que sólo tome valores positivos. La única otra desigualdad relevante que se puede aplicar dado que sólo conocemos la media y la varianza de P_n es la desigualdad de Chebyshev.

Observemos primero que $|P_n - \mathbb{E}(P_n)| \geq P_n - \mathbb{E}(P_n)$, luego, por monotonía de $\mathbb{P}(\cdot)$,

$$\mathbb{P}\left(\{P_n > an\}\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\{P_n - \mathbb{E}(P_n) > an - \mathbb{E}(P_n)\}\right) \;\leq\; \mathbb{P}\left(\{|P_n - \mathbb{E}(P_n)| > an - \mathbb{E}(P_n)\}\right).$$

Aplicando la desigualdad de Chebyshev,

$$\mathbb{P}\left(\{P_n > an\}\right) \;\leq\; \frac{\mathbb{V}ar(P_n)}{(an - \mathbb{E}(P_n))^2}.$$

Como $\mathbb{E}(P_n) = n\mu$ y $\mathbb{V}ar(P_n) = n\sigma^2$, se concluye que $\mathbb{P}(\{P_n > an\}) \leq \sigma^2/((a-\mu)^2 n)$.

(iv).- Como en cada instante de tiempo P_n crece o decrece en a lo más 1,

$$D \;=\; \min\{n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \,:\, P_n \geq 1\} \;=\; \min\{n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \,:\, P_n = 1\}.$$

Además, n es par sí y sólo si P_n es par. Luego, necesariamente se tendrá que $P_n = 1$ sólo si n es impar. Sigue inmediatamente que D sólo puede tomar valores impares, i.e., si m es par, entonces $p_D(m) = \mathbb{P}(\{D = m\}) = 0$. Por otro lado,

$$p_D(1) \;=\; \mathbb{P}\left(\{D = 1\}\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\{P_1 = 1\}\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\{X_1 = 1\}\right) \;=\; p.$$

Estudiemos ahora el caso $m > 1$ impar. Para ello primero observemos que si $1 < D = m < +\infty$, entonces en $t = 1$ la partícula no pudo haberse movido a la derecha (si lo hubiese hecho D sería igual a 1). Además, después de moverse a la izquierda en $t = 1$, la partícula debe haber regresado al origen en algún instante posterior T, donde $1 < T < m$ (puesto que en $t = m$ la partícula se encontraba a la derecha del origen). Luego, por regla de probabilidades totales,

$$p_D(m) \;=\; \mathbb{P}\left(\{D = m\}\right) \;=\; \sum_{t=2}^{m-1} \mathbb{P}\left(\{D = m, T = t\}\right).$$

Para que el evento $\{D = m, T = t\}$ ocurra la partícula primero se debe mover a la izquierda (probabilidad q), en los instantes $\{2, \ldots, t-1\}$ debe permanecer a la izquierda del origen y en el instante t debe encontrarse en el origen (probabilidad $\mathbb{P}(\{D = t-1\})$), y en los instantes $\{t+1,\ldots,m-1\}$ nunca está a la derecha del origen y en el instante m debe encontrarse a la derecha del origen (probabilidad $\mathbb{P}(\{D = m-t\})$). Los tres eventos mencionados son independientes pues se definen en termino de lo que sucede en distintos instantes de tiempo. Luego, $\mathbb{P}(\{D = m, T = t\}) = q\mathbb{P}(\{D = t-1\})\,\mathbb{P}(\{D = m-t\}) = qp_D(t-1)p_D(m-t)$. Sigue que,

$$p_D(m) \;=\; \sum_{t=2}^{m-1} qp_D(t-1)p_D(m-t) \;=\; q\sum_{t=1}^{m-2} p_D(t)p_D(m-t+1)\,.$$

Finalmente como $p = 2q$ y $p+q = 1$, tenemos que $p = 2/3$ y $q = 1/3$. Luego,

$$\mathbb{P}(\{D \geq 4\}) \;=\; 1 - \mathbb{P}(\{D \leq 3\}) \;=\; 1 - \mathbb{P}(\{D = 1\}) - \mathbb{P}(\{D = 2\}) - \mathbb{P}(\{D = 3\})\,.$$

Pero $\mathbb{P}(\{D = 2\}) = 0$ y $\mathbb{P}(\{D = 1\}) = p$. De la recurrencia deducimos que $\mathbb{P}(\{D = 3\}) = qp^2$.

(v).- Primero demostremos la indicación. Dado que $q = 1-p$, tenemos que $1-4pq = 1-4p+4p^2 = (1-2p)^2 = (q-p)^2$.

La probabilidad que la partícula este alguna vez a la derecha del origen es por la Regla de las Probabilidades Totales y definición de $h(\cdot)$,

$$\mathbb{P}(\{D \neq +\infty\}) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{D = m\}) \;=\; h(z)|_{z=1} \;=\; \frac{2p}{1+\sqrt{1-4pq}} \;=\; \frac{2p}{1+|q-p|}\,.$$

Luego, como $1-p = q$ y $1-q = p$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{D \neq +\infty\}) \;&=\; \begin{cases} \dfrac{2p}{1-p+q}\,, & \text{si } p < q\,, \\ \dfrac{2p}{1+p-q}\,, & \text{si } p \geq q\,. \end{cases} \\
&=\; \begin{cases} p/q\,, & \text{si } p < q\,, \\ 1\,, & \text{si } p \geq q\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

(vi).- Lo que se pide es calcular $\mathbb{E}(D)$, pero

$$\mathbb{E}(D) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} mp_D(m) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial z}\sum_{m=1}^{\infty} z^m p_D(m)\right)\Bigg|_{z=1} \;=\; \frac{\partial h(z)}{\partial z}\Bigg|_{z=1}\,.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D) \;&=\; \left(\frac{2p}{1+\sqrt{1-4pqz^2}} - \frac{2pz(-4pqz/\sqrt{1-4pqz^2})}{(1+\sqrt{1-4pqz^2})^2}\right)\Bigg|_{z=1} \\
&=\; \frac{2p}{1+|p-q|} + \frac{8p^2q/|p-q|}{(1+|p-q|)^2} \\
&=\; \frac{1}{|p-q|}\left(\frac{2p|p-q|}{1+|p-q|} + \frac{8p^2q}{(1+|p-q|)^2}\right)\,.
\end{aligned}$$

Sigue que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(D) &= \begin{cases} \dfrac{1}{p-q}\left(\dfrac{2p(p-q)}{2p} + \dfrac{8p^2q}{(2p)^2}\right), & \text{si } p > q\,, \\ +\infty\,, & \text{si } p = q\,. \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1/(p-q)\,, & \text{si } p > q\,, \\ +\infty\,, & \text{si } p = q\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Finalmente, si $p = 2q$, entonces $p = 2/3$ y $q = 1/3$, luego, $\mathbb{E}\,(D) = 3$. Al aplicar la desigualdad de Markov se tiene que

$$
\mathbb{P}\,(\{D \geq 4\}) \;\leq\; \frac{\mathbb{E}\,(D)}{4} \;=\; \frac{3}{4}\,.
$$