MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**11 de Noviembre, 1999**

Pauta Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi, A. Moreira — *Prof. Auxiliar: J. Barrera, E. Moreno, M. Saez*

PROBLEMA 1:

(i).- Una posibilidad para calcular lo que se pide sería integrar la densidad conjunta de W y Z (encontrándola primero, en (ii)), pero las integrales resultantes son muy engorrosas. Más fácil es reescribir el evento en términos de X e Y. Para $x > 0$, $y > 0$, se tiene

$$\begin{array}{ccccc} W > 1 & \iff & X/Y > 1 & \iff & X > Y\,, \\ W > Z & \iff & X/Y > XY & \iff & Y < 1\,. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}\left(\{W \geq 1, W \geq Z\}\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\{Y < 1, X > Y\}\right) \;=\; \int_0^1 \int_y^\infty e^{-x} e^{-y} dx dy \;=\; \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right)\,.$$

(ii).- Usaremos el método del Jacobiano con $\vec{g}$:$(0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty) \times (0,\infty)$ tal que

$$\begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix} \;=\; \vec{g}(X,Y) \;=\; \begin{pmatrix} g_1(X,Y) \\ g_2(X,Y) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} X/Y \\ XY \end{pmatrix}\,.$$

Claramente, $\vec{g}$ está bien definida, y es biyectiva y derivable en dicho conjunto. Despejando se tiene

$$w \;=\; x/y\,, \quad \text{y} \quad z \;=\; xy \quad \Longrightarrow \quad x \;=\; \sqrt{wz}\,, \quad \text{y} \quad y \;=\; \sqrt{z/w}\,.$$

Además, el Jacobiano de $\vec{g}$ es

$$J(x,y) \;=\; \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} \\ y & x \end{pmatrix} \;=\; 2\,\frac{x}{y}\,.$$

Por lo tanto, el Jacobiano no se anula en ningún punto (x,y) en el dominio de $\vec{g}$. Finalmente, como X e Y son independientes,

$$f_{X,Y}(x,y) \;=\; f_X(x) f_Y(y) \;=\; \begin{cases} e^{-(x+y)}\,, & \text{si } x > 0,\, y > 0\,, \\ 0\,, & \text{en caso contrario}\,. \end{cases}$$

Por lo tanto, si $w > 0$, $z > 0$,

$$f_{W,Z}(w,z) \;=\; f_{X,Y}(x,y)|J(x,y)|^{-1}\Big|_{x=\sqrt{wz},\,y=\sqrt{w/z}} \;=\; \frac{1}{2w}\,e^{-(\sqrt{w}+\frac{1}{\sqrt{w}})\sqrt{z}}\,.$$

Es decir,

$$f_{W,Z}(w,z) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2w} e^{-(\sqrt{w}+\frac{1}{\sqrt{w}})\sqrt{z}}\,, & \text{si } w > 0,\, z > 0\,, \\ 0\,, & \text{en caso contrario}\,. \end{cases}$$

PROBLEMA 2:

(i.1).- Sea $t \neq t'$. Como Θ_t y $\Theta_{t'}$ son independientes, las variables aleatorias $X_t = \cos\Theta_t$ y $X_{t'} = \cos\Theta_{t'}$ también son independientes. Luego, $\mathbb{E}(X_t X_{t'}) = \mathbb{E}(X_t)\,\mathbb{E}(X_{t'})$. Como además,

$$\mathbb{E}(X_t) \;=\; \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \;=\; 0\,.$$

Se concluye que $\mathbb{E}(X_t X_{t'}) = 0$. Un argumento similar permite concluir que $\mathbb{E}(Y_t Y_{t'}) = 0$ si $t \neq t'$.

(i.2).- Por definición de D_n y propiedades de $\mathbb{E}(\cdot)$,

$$\mathbb{E}\left(D_n^2\right) \;=\; \mathbb{E}\left(\sum_{t,t'=1}^{n} (X_t X_{t'} + Y_t Y_{t'})\right) \;=\; \sum_{t=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_t^2 + Y_t^2\right) + \sum_{t=1}^{n} \sum_{t'=1:t'\neq t}^{n} \mathbb{E}(X_t X_{t'} + Y_t Y_{t'})\;.$$

De la parte anterior y como $X_t^2 + Y_t^2 = 1$ se concluye que $\mathbb{E}\left(D_n^2\right) = n$.

(ii).- Veremos dos formas de calcular $\mathbb{E}(P_n)$.

PRIMERA FORMA: Sea R_n el número de veces que la partícula se desplaza hacia la derecha. Claramente, R_n se distribuye como una Binomial(n,p). Sigue que $\mathbb{E}(R_n) = np$. Por otro lado, $P_n = 2R_n - n$. Luego, $\mathbb{E}(P_n) = 2\mathbb{E}(R_n) - n = (2p-1)n = (p-q)n$.

SEGUNDA FORMA: Sea X_t la variable aleatoria que toma el valor -1 o 1 dependiendo de si la partícula se mueve hacia la izquierda o la derecha en el instante t. Recordar que la dirección en que se mueve la partícula en cada instante no depende de lo que ocurra en otros instantes. Luego, si $t \neq t'$, entonces X_t y $X_{t'}$ son independientes y $P_n = \sum_{t=1}^{n} X_t$. Además, como $\mathbb{E}(X_t) = 1\cdot p + (-1)\cdot q = p - q$, por linealidad de la esperanza concluimos que $\mathbb{E}(P_n) = n(p-q)$.

PROBLEMA 3:

(i).- Sea $f(a,b) = \mathbb{E}\left((Y-(aX+b))^2\right)$, i.e.,

$$f(a,b) \;=\; \mathbb{E}\left(Y^2\right) + a^2\mathbb{E}\left(X^2\right) + b^2 - 2a\mathbb{E}(XY) - 2b\mathbb{E}(Y) + 2ab\mathbb{E}(X)\;.$$

Los valores críticos de $f(\cdot,\cdot)$ se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial a} = 2a\mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}(XY) + 2b\mathbb{E}(X)\;, \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial b} = 2b - 2\mathbb{E}(Y) + 2a\mathbb{E}(X)\;, \end{aligned}$$

o lo que es equivalente,

$$a\mathbb{E}\left(X^2\right) + b\mathbb{E}(X) \;=\; \mathbb{E}(XY)\;, \tag{1}$$
$$a\mathbb{E}(X) + b \;=\; \mathbb{E}(Y)\;. \tag{2}$$

Despejando por b en (2) se obtiene que

$$b \;=\; \mathbb{E}(Y) - a\mathbb{E}(X)\;.$$

Restándole a (1) el producto de (2) y $\mathbb{E}(X)$, recordando que $\mathbb{V}ar\,(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}^2(X)$, y que $\mathbb{C}ov\,(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$, se obtiene que

$$a \;=\; \frac{\mathbb{C}ov\,(X,Y)}{\mathbb{V}ar\,(X)} \;=\; \rho\,(X,Y)\,\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\,.$$

Además, la matriz

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial a^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial b^2} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2\mathbb{E}\left(X^2\right) & 2\mathbb{E}(X) \\[2ex] 2\mathbb{E}(X) & 2 \end{pmatrix},$$

es semi–definida positiva puesto que $2\mathbb{E}\left(X^2\right) \geq 0$ y $4\mathbb{E}\left(X^2\right) - 4\mathbb{E}^2(X) = 4\mathbb{V}ar\,(X) \geq 0$. Luego, el punto crítico $(\widehat{a},\widehat{b})$ donde $\widehat{a} = \rho\,(X,Y)\,\sigma(Y)/\sigma(X)$, y $\widehat{b} = \mathbb{E}(Y) - \widehat{a}\mathbb{E}(X))$ minimiza $f(\cdot,\cdot)$.

(ii).- Determinemos primero $\mathbb{E}(XY)$. De la fórmula para calcular la esperanza de una función de un vector aleatorio tenemos que

$$\mathbb{E}(XY) \;=\; \sum_{(x,y):p_{X,Y}(x,y)>0} xy p_{X,Y}(x,y) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,.$$

Para calcular $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ primero necesitamos determinar la función densidad de probabilidad de X, i.e., $p_X(\cdot)$. Para ello observar que

$$p_X(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} p_X(x,y_j)\,.$$

Como $p_{X,Y}(x,y_j)$ es igual a $1/n$ si $x = x_j$ y 0 en caso contrario se tiene que

$$p_X(x) \;=\; \begin{cases} 1/n\,, & \text{si } x \in \{x_1,\ldots,x_n\}\,, \\ 0\,, & \text{en caso contrario}\,. \end{cases}$$

Luego,

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \sum_{x:p_X(x)>0} x p_X(x) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,.$$

Análogamente,

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) \;=\; \sum_{x:p_X(x)>0} x^2 p_X(x) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\,.$$

(iii).- La completación de la tabla se muestra en la Fig. 1. Observar que

$$\widehat{a} \;=\; \frac{\mathbb{C}ov\,(X,Y)}{\mathbb{V}ar\,(X)} \;=\; \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)}{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)} \;=\; \frac{2 - 1\cdot 4}{5 - 1^2} \;=\; -\frac{1}{2}\,,$$

y que

$$\widehat{b} \;=\; \mathbb{E}(Y) - \widehat{a}\mathbb{E}(X) \;=\; 4 + \frac{1}{2}\cdot 1 \;=\; \frac{9}{2}\,.$$

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
1	-2	5	4	25	-10
2	0	4	0	16	0
3	1	6	1	36	6
4	2	3	4	9	6
5	4	2	16	4	8
Total	5	20	25	90	10
Promedio	1	4	5	14	2

Figure 1:

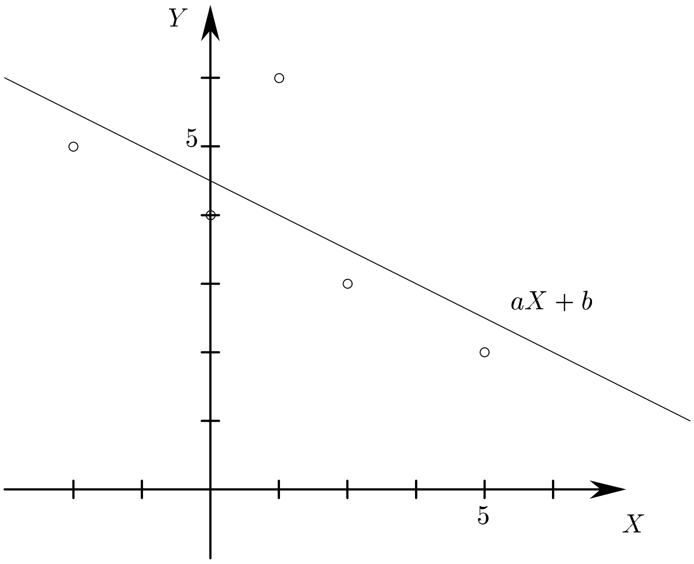

Figure 2:

El gráfico de los puntos y la recta correspondiente se muestra en la Fig. 2

(iv).- Veremos dos formas de probar que X e Y no son independientes.

PRIMERA FORMA: Si X e Y fuesen independientes tendríamos que $\mathbb{C}ov\,(X,Y)=0$. Pero,

$$\mathbb{C}ov\,(X,Y) \;=\; \mathbb{E}\,(XY) - \mathbb{E}\,(X)\,\mathbb{E}\,(Y) \;=\; 2-1\cdot 4 \;=\; -2 \neq 0\,.$$

SEGUNDA FORMA: Por definición, bastará exhibir dos conjuntos A y B tales que

$$\mathbb{P}\left(\{X\in A, Y\in B\}\right) \quad\neq\quad \mathbb{P}\left(\{X\in A\}\right)\mathbb{P}\left(\{Y\in B\}\right)\,.$$

Sean $A=\{-2\}$ y $B=\{4\}$. Como $(-2,4)\notin\{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$,

$$\mathbb{P}\left(\{X\in A, Y\in B\}\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\{X=-2, Y=4\}\right) \;=\; 0\,.$$

Además, $\mathbb{P}\left(\{X\in A\}\right)=\mathbb{P}\left(\{X=-2\}\right)=1/5$, y $\mathbb{P}\left(\{X\in B\}\right)=\mathbb{P}\left(\{Y=4\}\right)=1/5$. Sigue que

$$\mathbb{P}\left(\{X\in A, Y\in B\}\right) \;=\; 0 \;\neq\; 1/25 \;=\; \mathbb{P}\left(\{X\in A\}\right)\mathbb{P}\left(\{X\in B\}\right)\,.$$