MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**11 de Octubre, 1999**

Pauta Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi, A. Moreira *Prof. Auxiliar: J. Barrera, E. Moreno, M. Saez*

PROBLEMA 1:

(i).- Recordemos primero que si X es una Normal(μ, σ^2) entonces $(X - \mu)/\sigma$ es una Normal$(0, 1)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{|X| \leq t\}) &= \mathbb{P}(\{X \leq t\}) + \mathbb{P}(\{X < -t\}) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right\}\right) - \mathbb{P}\left(\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{-t-\mu}{\sigma}\right\}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-t-\mu}{\sigma}\right) .
\end{aligned}$$

Pero como $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, sigue que

$$\mathbb{P}(\{|X| \leq t\}) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{t+\mu}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{t+\mu}{\sigma}\right) - 1 .$$

(ii).- Si X es una Exponencial(λ), entonces $f_X(t) = \mathbb{I}_{[0,\infty)}(t)\lambda e^{-\lambda t}$. Luego,

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Como la mediana m esta definida por la relación $F(m) = 1/2$, para calcular dicho valor debemos resolver

$$1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} .$$

Despejando, obtenemos que $m = \ln(2)/\lambda$.

(iii).- Observemos que:

- Si $t < 1 - a$ entonces $\mathbb{P}(\{F(X) \leq t\}) = \mathbb{P}(\{X < 0\}) = 0$.
- Si $t \in [1 - a, 1)$ entonces $\mathbb{P}(\{F(X) \leq t\}) = \mathbb{P}(\{X \leq t^*\})$, donde t^* es el único elemento $t \in \mathbb{R}$ tal que $F(t^*) = t$ (ver Fig. 1). Luego, $\mathbb{P}(\{F(X) \leq t\}) = F(t^*) = t$.
- Si $t \geq 1$, $\mathbb{P}(\{F(X) \leq t\}) = 1$.

Luego, la distribución Y es (ver Fig. 2):

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 - a, \\ t & \text{si } 1 - a \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

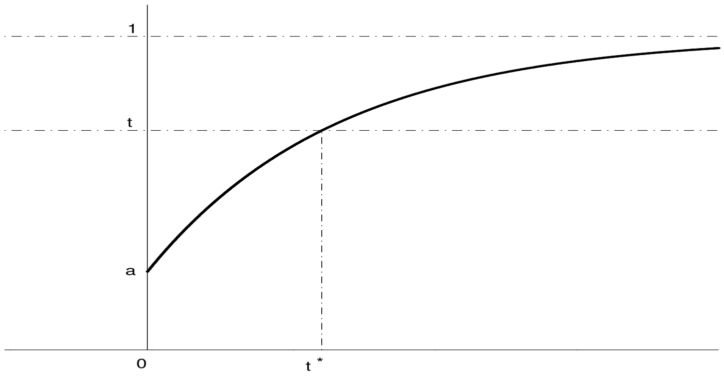

Figure 1: Distribución de X.

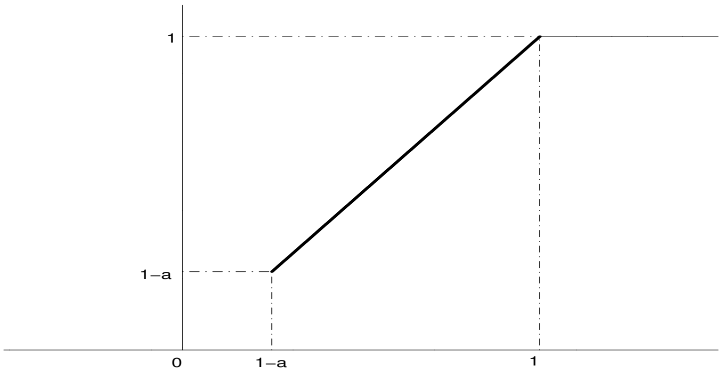

Figure 2: Distribución de Y.

Sigue que si $a = 1$, entonces F_Y es la función distribución de una Uniforme$(0, 1)$.

PROBLEMA 2:

(i.1).- Definamos $\psi_i = \mathbb{P}(\{X = i+1\}) / \mathbb{P}(\{X = i\})$. Observar que

$$\psi_i \;=\; \frac{\binom{n}{i+1} p^{i+1}(1-p)^{n-i-1}}{\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}} \;=\; \frac{n-i}{i+1}\,\frac{p}{1-p}\,.$$

Sigue que

$$\begin{aligned} \psi_i \;&\geq\; 1 \quad\Longleftrightarrow\quad p(n+1) \geq i+1\,, \quad \text{y} \\ \psi_i \;&\leq\; 1 \quad\Longleftrightarrow\quad p(n+1) \leq i+1\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = i\}) \leq \mathbb{P}(\{X = i+1\}) \quad&\Longleftrightarrow\quad i \leq (n+1)p - 1\,, \quad \text{y} \\ \mathbb{P}(\{X = i\}) \geq \mathbb{P}(\{X = i+1\}) \quad&\Longleftrightarrow\quad i \geq (n+1)p - 1\,. \end{aligned}$$

Resumiendo, $(\mathbb{P}(\{X = i\}))_{i=0}^n$ es una secuencia unimodal, i.e., que primero es creciente y luego decreciente.

(i.2).- Queremos encontrar los valores de p para los cuales se tiene que $\mathbb{P}(\{X = k\}) \geq \mathbb{P}(\{X = i\})$ cualquiera sea $i \in \{0, \ldots, n\}$. De la unimodalidad de la secuencia $(\mathbb{P}(\{X = i\}))_{i=0}^n$ demostrada en (i.1), sigue que basta encontrar los valores de p para los cuales se tiene

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) \geq \mathbb{P}(\{X = k-1\})\,, \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(\{X = k\}) \geq \mathbb{P}(\{X = k+1\})\,.$$

Equivalentemente,

$$\psi_{k-1} \;\geq 1 \quad \text{y} \quad \psi_k \;\leq 1$$

Por (1), lo anterior equivale a pedir que $(n+1)p \geq k$ y $(n+1)p \leq k+1$. Es decir,

$$\frac{k}{n+1} \;\leq\; p \;\leq\; \frac{k+1}{n+1}\,.$$

(ii.1).- La probabilidad que salga SELLO en la $\mathbf{Etapa(n)}$ es, por independencia de los dos lanzamientos realizados en dicha etapa, igual a la probabilidad de obtener sello en el primer lanzamiento multiplicado por la probabilidad de obtener cara en el segundo lanzamiento, i.e., $(1-p)p$. Análogamente, la probabilidad que salga CARA en la misma etapa es $p(1-p)$. Luego, ambas probabilidades son iguales.

(ii.2).- Observar que cada etapa tiene la misma probabilidad de quedar DEFINIDA. Denotemos dicha probabilidad por P. Sea X la variable aleatoria que representa el número de la primera etapa que queda DEFINIDA. Claramente, X se distribuye como una Geomtrica(P). Por otro lado, P es igual a la probabilidad que salga SELLO o que salga CARA. Como ambos eventos son disjuntos y ocurren con probabilidad $p(1-p)$ respectivamente (como se demostró en (ii.1)), sigue que $P = 2p(1-p)$. Luego, para todo $m \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\{X = m\}) \;=\; (1-P)^{m-1}P\,, \quad \text{donde} \quad P = p(1-p)\,.$$

(iii).- Si $\{i,j\} \cap \{i',j'\} = \emptyset$, entonces $E_{i,j}$ y $E_{i',j'}$ son independientes pues son eventos que dependen de distintos lanzamientos de la moneda.

Si $\{i,j\} \cap \{i',j'\} \neq \emptyset$, y asumimos sin perdida de generalidad que $i < j$ y $i' < j'$, entonces debe tenerse que $j = i'$. Observemos además, que la probabilidad que en el j–ésimo lanzamiento salga lo mismo que ya salió en el i–ésimo es $1/2$, i.e., $\mathbb{P}(E_{i,j}) = 1/2$. Análogamente, $\mathbb{P}(E_{i',j'}) = 1/2$. Por otro lado, el evento $E_{i,j} \cap E_{i',j'}$ ocurre si en los lanzamientos i, $j = i'$, j' sale lo mismo. La probabilidad que en los lanzamientos $j = i'$ y j' salga lo mismo que salió en el lanzamiento i es $(1/2)^2 = 1/4$, i.e., $\mathbb{P}(E_{i,j} \cap E_{i',j'}) = 1/4$. Sigue que $\mathbb{P}(E_{i,j} \cap E_{i',j'}) = \mathbb{P}(E_{i,j})\,\mathbb{P}(E_{i',j'})$, i.e., $E_{i,j}$ y $E_{i',j'}$ son eventos independientes.