MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**27 de Noviembre, 1999**

Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi, A. Moreira *Prof. Auxiliar: J. Barrera, E. Moreno, M. Saez*

TIEMPO: 3 HRS.

PROBLEMA 1: (33 %) Sean U y V dos variables aleatorias independientes, distribuídas de manera uniforme en $(0,1]$ y $(0,1)$ respectivamente.

(i).- (2.5 pts) Se definen las variables aleatorias

$$\Theta \;=\; \pi(2U-1)\,, \qquad R \;=\; \sqrt{2\ln\frac{1}{V}}\,.$$

Es fácil verificar que Θ se distribuye de manera uniforme en $(-\pi,\pi]$ (¡no lo demuestre!). Pruebe que R tiene densidad $f_R(r) = re^{-r^2/2}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(r)$. ¿Son Θ y R independientes? ¿Por qué?

(ii).- (2.5 pts) Se definen las variables aleatorias

$$X \;=\; R\cos\Theta\,, \qquad Y \;=\; R\sin\Theta\,.$$

Usando el método del jacobiano, demuestre que X, Y son independientes, cada una con distribución Normal$(0,1)$.

(iii).- (1.0 pts) En un computador, una manera de obtener números aleatorios es mediante una función que entrega valores al azar en $\{1,\ldots,MaxNum\}$. Para una cierta simulación, se necesita generar valores aleatorios que sigan una distribución normal de media μ, y varianza σ^2. ¿Cómo resolvería usted el problema?

PROBLEMA 2: (67 %) Considere una partícula situada en el origen de una recta en el instante $t=0$ que en cada instante de tiempo $t \in \mathbb{N}$ se desplaza en $X_t \in \mathbb{R}$ (donde X_t es mayor o menor que 0 dependiendo de si la partícula se desplaza hacia la izquierda o la derecha). El movimiento de la partícula en cada instante de tiempo no depende del desplazamiento que efectúe en otros instantes. Sigue que la posición de la partícula en el instante n es

$$P_n \;=\; X_1 + X_2 + \ldots + X_n\,.$$

En lo que sigue, la función distribución de una Normal$(0,1)$ la denotaremos por Φ y supondremos que las variables aleatorias X_t son de media μ y varianza σ^2 finitas y conocidas.

(i).- Asumiendo que las variables aleatorias $X_1,\ldots,X_n$ son normales, pruebe que

$$\mathbb{P}\left(\{P_n > an\}\right) \;=\; 1-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\,.$$

(ii).- Si n es grande y se sabe que $X_1,\ldots,X_n$ son idénticamente distribuidas, pero se desconocen sus distribuciones ¿Cómo se puede aproximar $\mathbb{P}\left(\{P_n > an\}\right)$?

(iii).- Si no se conoce la distribución de $X_1, \ldots, X_n$ y n no es lo suficientemente grande como para que la aproximación en (ii) sea válida, entonces sólo se pueden obtener cotas para $\mathbb{P}(\{P_n \geq an\})$. Obtenga la mejor cota que pueda. Justifique.

Sean p y q números enteros no–negativos tales que $p + q = 1$. En lo que sigue, suponga que las variables aleatorias X_t que describen el desplazamiento de la partícula toman el valor -1 o 1 con probabilidad q y p respectivamente.

Sea D la variable aleatoria que representa el primer instante en el cual la partícula se encuentra a la derecha del origen, i.e.,

$$D \quad = \quad \min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,:\, P_n = 1\}\,,$$

si existe un $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $P_n \geq 1$ y $D = +\infty$ en caso contrario.

(iv).- Sea $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pruebe que si m es par, entonces $p_D(m) = 0$, que $p_D(1) = p$, y que si $m > 1$ es impar

$$p_D(m) \quad = \quad q \cdot \Big(p_D(1) \cdot p_D(m-2) + p_D(2) \cdot p_D(m-3) + \ \ldots + p_D(m-2) \cdot p_D(1)\Big)\ .$$

Verifique que si $p = 2q$, entonces $\mathbb{P}(\{D \geq 4\}) = 1 - \mathbb{P}(\{D \leq 3\}) = 5/27$.

Indicación: Para probar la recurrencia, observe que si $1 < D = m < +\infty$, entonces necesariamente la partícula en el instante $t = 1$ se desplazó hacia la izquierda y en algún instante $1 < t < m$ regresó al origen por primera vez. Particione de acuerdo a ese momento.

Sea $h(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^m p_D(m)$. De (iv) se deduce (no lo pruebe) que $h(z) = 2pz/(1 + \sqrt{1 - 4pqz^2})$.

(v).- Argumente que la probabilidad que la partícula esté alguna vez a la derecha del origen es

$$h(z)\big|_{z=1} \quad = \quad \begin{cases} p/q\,, & \text{si } p < q\,, \\ 1\,, & \text{si } p \geq q\,. \end{cases}$$

Indicación: Muestre que $(p - q)^2 = 1 - 4pq$.

(vi).- Argumente que el tiempo esperado para que la partícula esté por primera vez a la derecha del origen es

$$\left.\frac{\partial h(z)}{\partial z}\right|_{z=1} \quad = \quad \begin{cases} 1/(p - q)\,, & \text{si } p > q\,, \\ \infty\,, & \text{si } p = q\,. \end{cases}$$

Para el caso en que $p = 2q$, aplique la desigualdad de Markov para acotar $\mathbb{P}(\{D \geq 4\})$.