MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **15 de Noviembre, 1999**

Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi, A. Moreira *Prof. Auxiliar: J. Barrera, E. Moreno, M. Saez*

TIEMPO: 3 HRS.

PROBLEMA 1: Sean X e Y variables aleatorias independientes ambas con función densidad $f(t) = e^{-t}\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(t)$. Sean además,

$$W = X/Y, \quad \text{y} \quad Z = XY.$$

(i).- Calcule $\mathbb{P}(\{W \geq 1, W \geq Z\})$.

(ii).- Encuentre la función de densidad conjunta de W y Z.

PROBLEMA 2:

(i).- (4.0 pts) Considere una partícula situada en el origen del plano cartesiano en el instante $t = 0$. Suponga que dicha partícula en cada instante de tiempo $t \in \mathbb{N}$ avanza una distancia fija unitaria en una dirección arbitraria, específicamente en una dirección que forma un ángulo $\Theta_t \sim$ Uniforme$(0, 2\pi)$ con respecto a la horizontal (ver Fig. 1). Más aún, la dirección en que se mueve la partícula en cada instante no depende de la dirección que tome en otros instantes.

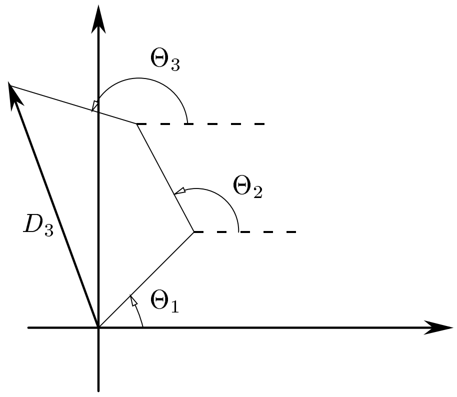

Figura 1:

(i.1).- Defina $X_t = \cos\Theta_t$ e $Y_t = \sin\Theta_t$ y verifique que si $t, t' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ son tales que $t \neq t'$, entonces $\mathbb{E}(X_t X_{t'}) = \mathbb{E}(Y_t Y_{t'}) = 0$.

(i.2).- Calcule $\mathbb{E}\left(D_n^2\right)$, donde D_n es la variable aleatoria que representa la distancia del origen a la posición de la partícula después de transcurridos n instantes, i.e.,

$$D_n^2 = \left(\sum_{t=1}^{n} X_t\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{n} Y_t\right)^2.$$

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	-2	5			
2	0	4			
3	1	6			
4	2	3			
5	4	2			
Total	5	20			
Promedio	1	4			

Figura 2:

(ii).- (2.0 pts) Sean p y q números no–negativos tales que $p+q=1$. Considere una partícula situada en el origen de una recta en el instante $t=0$. Suponga que dicha partícula en cada instante de tiempo $t \in \mathbb{N}$ avanza una distancia fija unitaria moviéndose a la derecha con probabilidad p y a la izquierda con probabilidad q. Más aún, la dirección en que se mueve la partícula en cada instante no depende de la dirección que tome en otros instantes. Sea P_n la variable aleatoria que representa la posición de la partícula después de transcurridos n instantes. Calcule $\mathbb{E}\left(P_n\right)$.

Problema 3:

Sean X e Y variables aleatorias. Denotaremos por $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ respectivamente los estimadores de mínimos cuadrados de a y b, i.e., los valores de a y b que minimizan

$$\mathbb{E}\left((Y-(aX+b))^2\right) .$$

(i).- Pruebe que $\widehat{a} = \rho(X,Y)\dfrac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}$, y $\widehat{b} = \mathbb{E}\left(Y\right) - \widehat{a}\,\mathbb{E}\left(X\right)$.

(ii).- Suponga que se toman n mediciones que arrojan como resultado los puntos $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$. Considere ahora el vector aleatorio (X,Y) uniformemente distribuido sobre $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n$, i.e.,

$$p_{X,Y}(x,y) \;=\; \begin{cases} 1/n, & \text{si } (x,y) \in \{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Asuma, por simplicidad, que $x_1,\dots,x_n$ e $y_1,\dots,y_n$ son distintos, y pruebe que

$$\mathbb{E}\left(X\right) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\,, \qquad \mathbb{E}\left(X^2\right) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\,, \quad \text{y} \quad \mathbb{E}\left(XY\right) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i\,.$$

Análogamente se tiene (no lo pruebe) que $\mathbb{E}\left(Y\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, y $\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i^2$.

(iii).- Complete la tabla de la Fig. 2, grafique los puntos (x_i,y_i) que allí se tabulan, determine los estimadores de mínimos cuadrados $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ asociados, y dibuje la recta $\widehat{a}\,x+\widehat{b}$.

(iv).- Pruebe que las variables aleatorias X e Y asociadas a los puntos $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ tabulados en la Fig. 2 no son independientes.