MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **11 de Octubre, 1999**

Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi, A. Moreira *Prof. Auxiliar: J. Barrera, E. Moreno, M. Saez*

TIEMPO: 3 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$. Si $\Phi(\cdot)$ denota la función distribución de una Normal$(0,1)$ pruebe que

$$\mathbb{P}\left(\{|X| \leq t\}\right) \;=\; \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{t+\mu}{\sigma}\right) - 1\,.$$

(ii).- La mediana de una variable aleatoria absolutamente continua con distribución F se define como el valor m tal que $F(m) = 1/2$. Calcule la mediana de una variable aleatoria Exponencial(λ).

(iii).- Sea $a \in [0,1]$. Considere una variable aleatoria X cuya función distribución es

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0\,, \\ 1 - ae^{-\lambda t} & t \geq 0\,. \end{cases}$$

Sea $Y = F(X)$, determine la función distribución de Y y especifique para que valor de $a \in [0,1]$ se tiene que $Y \sim \text{Uniforme}(0,1)$.

Indicación: Grafique la función distribución F.

PROBLEMA 2:

(i).- (2.5 pts) Se quiere estimar la probabilidad p que una moneda salga cara. Para ello, se lanza la moneda n veces y se observa que salieron k caras.

Sea X la variable aleatoria que representa el número de veces que sale cara en n lanzamientos de una moneda con probabilidad p de caer cara, i.e., $X \sim \text{Binomial}(n,p)$.

(i.1).- Verifique que la sucesión $\left(\mathbb{P}\left(\{X = i\}\right)\right)_{i=0}^{n}$ primero crece y luego decrece.

Indicación: Calcule $\dfrac{\mathbb{P}\left(\{X = i+1\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{X = i\}\right)}$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, y compare dicha expresión con 1.

(i.2).- Una buena estimación de p es aquel valor $\widehat{p}$ que hace que $\mathbb{P}\left(\{X = k\}\right)$ sea la mayor probabilidad de entre $\mathbb{P}\left(\{X = 0\}\right), \ldots, \mathbb{P}\left(\{X = n\}\right)$. Compruebe que tal $\widehat{p}$ satisface,

$$\frac{k}{n+1} \;\leq\; \widehat{p} \;\leq\; \frac{k+1}{n+1}\,.$$

Indicación: Determine para que valores de p se tiene que

$$\frac{\mathbb{P}\left(\{X = k\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{X = k-1\}\right)} \;\geq\; 1\,, \qquad \text{y} \qquad \frac{\mathbb{P}\left(\{X = k\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{X = k+1\}\right)} \;\geq\; 1\,.$$

(ii).- (2.5 pts) Suponga que se tiene una moneda cuya probabilidad de caer cara es $p \neq 1/2$, i.e., la moneda no es perfecta. Considere el siguiente procedimiento para simular una moneda perfecta: Para $n = 1, 2, \ldots,$

Etapa(n): Se lanza la moneda dos veces,

- si primero sale *sello* y luego *cara* decimos que salió *SELLO*,
- si primero sale *cara* y luego *sello* decimos que salió *CARA*,
- en caso contrario decimos que la etapa queda *INDEFINIDA*.

(ii.1) Pruebe que la probabilidad que salga *SELLO* en la **Etapa(n)** es igual a la probabilidad que salga *CARA*.

(ii.2) Calcule la probabilidad que la m-ésima etapa sea la primera que quede *DEFINIDA*.

(iii).- (1.0 pts) Se lanza una moneda perfecta n veces. Sea $E_{i,j}$ con $i < j$ el evento correspondiente a "en el lanzamiento i y en el j se obtiene lo mismo". Pruebe que los eventos $E_{i,j}$ y $E_{i',j'}$ son independientes si $i \neq i'$ o $j \neq j'$.

SIN CONSULTAS.